Δίνεται η εξίσωση $x^3 - ax^2 - 9x + a = 0$ (1) Να βρείτε το πλήθος ριζών της (1) για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

$$x^3 - 9x = ax^2 - a \Leftrightarrow$$

$$x^3 - 9x = a(x^2-1) \quad (2)$$

Αν $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

$\underline{x=1}$: $1^3 - 9 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow -8 = 0$ άτοπο.

$\underline{x=-1}$ $-1 + 9 = 0 \Leftrightarrow 8 = 0$

Άρα $x^2 - 1 \neq 0$

$(2) \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{x^3 - 9x}{x^2 - 1} \quad (3)}$

Έστω $A(x) = \dfrac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}$

$x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

$$A'(x) = \frac{(3x^2-9)\cdot(x^2-1) - (x^3-9x)2x}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{3x^4 - 3x^2 - 9x^2 + 9 - 2x^4 + 18x^2}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{x^4 + 6x^2 + 9}{(x^2-1)^2} = \frac{(x^2+3)^2}{(x^2-1)^2} > 0$$

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$A'(x)$	+	‖ +	‖ +	
$A(x)$	↗	‖ ↗	‖ ↗	

$D_f = \underbrace{(-\infty, -1)}_{A_1} \cup \underbrace{(-1, 1)}_{A_2} \cup \underbrace{(1, +\infty)}_{A_3}$

Αύξουσα και συνεχής στο $A_1 \Rightarrow A(A_1) = \left(\lim_{x \to -\infty} A(x), \lim_{x \to -1^-} A(x)\right) = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} A(x) = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = -\infty$, $\lim_{x \to -1^-} A(x) = \lim_{x \to -1^-} \left[\underbrace{\dfrac{x^3 - 9x}{x-1}}_{B(x)} \cdot \dfrac{1}{x+1}\right] = +\infty$

$\lim_{x \to -1^-} B(x) = \dfrac{+8}{-2} = -4$. $\lim_{x \to -1^-} \dfrac{1}{x+1} = -\infty$

Ομοίως $A(A_2) = \mathbb{R}$,

$A(A_3) = \mathbb{R}$

Η εξίσωση (3) έχει 3 ακριβώς λύσεις $\forall a \in \mathbb{R}$.
μια στο A_1, μια στο A_2, μια στο A_3.
διότι $a \in A(A_1)$, $a \in A(A_2)$, $a \in A(A_3)$. Αυτές είναι μοναδικές.

Scanned with CamScanner

ασκ 9 / φ4. | $f(x)=x\cdot\ln(x^2+1)$. Εξίσωση $f(1)+f(x^2)=f(x)+f(x^3)$ (1)

Βρήκα ότι $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$. Το Π.Ο. της (1) είναι το $\mathbb{R}$

Αν $x>1 \Rightarrow x^3>x^2 \xrightarrow{f\uparrow} f(x^3)>f(x^2)$
$\xrightarrow{f\uparrow} f(x)>f(1)$ $\Big\} \xrightarrow{(+)} f(x^3)+f(x)>f(x^2)+f(1)$ $\Rightarrow$ η (1) ΔΕΝ ΑΛΗΘΕΥΕΙ για $x>1$

Αν $x<1 \Rightarrow$ ομοίως η (1) ΔΕΝ ΑΛΗΘΕΥΕΙ.

Άρα $x=1$ προφανής, μοναδική λύση.

Ερωτήσεις Σ-Λ.

1) Αν $f'(x)>0 \ \forall x\in D_f$ τότε $f\uparrow$ στο D_f. Λ $\left[D_f \overset{?}{=} \text{διάστημα} \right]$

2) Αν $f\uparrow$ σε διάστημα Δ και παρ/μη στο Δ, τότε $f'(x)>0 \ \forall x\in\Delta$. Λ

Αντιπαρ. $f(x)=x^3$.