

Ασκ. 8) $f(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x$

a) $f(\mathbb{R}) = ?$

$$f'(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$$

$$e^x + \frac{1}{e^x} + 2\cos x = \frac{e^{2x} + 1 + e^x 2\cos x}{e^x}$$

$$e^x + \frac{1}{e^x} \geq 2 \geq -2\cos x \Rightarrow e^x + \frac{1}{e^x} + 2\cos x \geq 0$$

$$-2 \leq 2\cos x \leq 2 \quad \leftarrow$$

$$2 \geq -2\cos x \geq -2 \quad \leftarrow$$

$$-2 \leq -2\cos x \leq 2$$

Το "=" ισχύει $\Leftrightarrow$

$$e^x + \frac{1}{e^x} = 2$$

$$x = 0$$



$$-2\cos x = 2$$

$$-2\cos 0 = 2$$

$$-2 = 2 \text{ αδύνατον}$$

Άρα το "=" δεν ισχύει ποτέ

$$\text{Άρα } f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \uparrow$$

Ασκ. 8) $f(x) = e^x - e^{-x} + 2\ln x$

a) $f(\mathbb{R}) = ?$

f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξη συνεχών και $\nearrow \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{(e^x - e^{-x})}_{A(x)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - e^{-x}) = -\infty$$

$$-2 \leq 2\ln x \leq 2$$

$$e^x - e^{-x} - 2 \leq 2\ln x + e^x - e^{-x} \leq \underbrace{2 + e^x - e^{-x}}_{\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + e^x - e^{-x}) = -\infty} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - e^{-x} + 2\ln x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - e^{-x}) = +\infty$$

$$-2 \leq 2\ln x \leq 2$$

$$\underbrace{A(x) - 2}_{\lim_{x \rightarrow +\infty} (A(x) - 2) = +\infty} \leq A(x) + 2\ln x \leq A(x) + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (A(x) - 2) = +\infty$$