ασκ.1 – Μαυρίδης / Σ. 534

$f(0)=2$, $f'(x)=e^{2x}\cdot f(-x)$ (1)

i) $f(-x)$ παρ/μη στο $\mathbb{R}$ σαν σύνθεση παρ/μων

$(e^{2x})' = e^{2x}\cdot(2x)'$.

$e^{2x}\cdot f(-x)$ παρ/μη σαν γινόμενο παρ/μων.

Άρα $f'(x)$ παρ/μη $\Rightarrow f$ 2φ. παρ/μη

ii) (1) $\Rightarrow f''(x)=e^{2x}\cdot 2\cdot f(-x)+e^{2x}\cdot f'(-x)\cdot(-1)=$

$=e^{2x}\left(2f(-x)-f'(-x)\right)$

Θεωρώ $f''(x)+f(x)=e^{2x}\left(2f(-x)-f'(-x)\right)+f(x)$

$=e^{2x}\left(2f(-x)-e^{-2x}f(x)\right)+f(x)=$

$=2e^{2x}f(-x)-\cancel{f(x)}+\cancel{f(x)}=2e^{2x}\cdot f(-x)=2f'(x)$

ο.ε.δ.

iii) $g'(x)=\left[\left(f'(x)-f(x)\right)e^{-x}\right]'=$

$\left(f''(x)-f'(x)\right)e^{-x}-\left(f'(x)-f(x)\right)e^{-x}=$

$e^{-x}\left(f''(x)-2f'(x)+f(x)\right)=e^{-x}\cdot 0=0.$

Άρα $g'(x)=0,\ x\in\mathbb{R}\Rightarrow g(x)=c,\ x\in\mathbb{R}$

(iv) Ν.δ.ο. $f(x)=e^{2x}$.

Ξέρω $g(x)=c\Rightarrow\left(f'(x)-f(x)\right)e^{-x}=c$

(1) $\Rightarrow f'(0)=e^{0}\cdot f(0)=1\cdot 2=2$

Τώρα $\left(f'(0)-f(0)\right)e^{0}=c \Leftrightarrow$

$(2-2)\cdot 1=c\Rightarrow c=0.$

$\left(f'(x)-f(x)\right)e^{-x}=0,\quad x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=f(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$

από εφαρμογή $\Rightarrow f(x)=c_1e^{x}$

$f(0)=c_1e^{0}\Leftrightarrow 2=c_1\Rightarrow f(x)=2e^{x},\ x\in\mathbb{R}$

Scanned with CamScanner

άσκ. 2 Μαυρίδης / Σ. 534

$f(0)=1, \quad g(0)=0$

$f(x)\neq 0, \quad x\in[0,\pi/2)$

$f'(x)=-f(x)\cdot g(x) \quad (1)$

$g'(x)=1+g^2(x) \quad (2)$

i) $(2)\Rightarrow g'(x)\geq 1>0$

Άρα $\boxed{g\uparrow}$ στο $\mathbb{R}$.

Για $x>0 \Rightarrow$

$g(x)>g(0)\Rightarrow$

$\boxed{g(x)>0}$

$\left.\begin{array}{l} f(x)\neq 0 \\ f \text{ συνεχής}\end{array}\right\} \Rightarrow$ διατηρεί πρόσημο $\Big| \Rightarrow$

$f(0)=1>0$

$\Rightarrow f(x)>0 \quad , x\in[0,\pi/2)$

$(1)\Rightarrow f'(x)=-\underbrace{f(x)}_{+}\cdot\underbrace{g(x)}_{+}<0\Rightarrow \boxed{f\downarrow \text{ στο } \mathbb{R}}$

(ii) $f'(x)=-f(x)\cdot g(x)$

γινόμενο παρ/μων $\Rightarrow$

$f'(x)$ παρ/μη $\Rightarrow f$ 2φ. παρ/μη

$(1)\Rightarrow f''(x)=-f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x) \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$f''(x)=f(x)\cdot g^2(x)-f(x)\cdot g'(x)\Leftrightarrow$

$f''(x)=f(x)\cdot\left(g^2(x)-g'(x)\right)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$

$f''(x)=f(x)\cdot(-1)\Leftrightarrow$

$f''(x)=-f(x)$ ο.ε.δ.

iii) $F(x)=\left(f(x)-\sigma υν x\right)^2+\left(f'(x)+\eta\mu x\right)^2$

$F'(x)=2\left(f(x)-\sigma υν x\right)\cdot\left(f'(x)+\eta\mu x\right)+$

$+2\left(f'(x)+\eta\mu x\right)\cdot\left(f''(x)+\sigma υν x\right)$

$=2\cdot\left(f'(x)+\eta\mu x\right)\cdot\left(f(x)-\sigma υν x+f''(x)+\sigma υν x\right)$

$=2\left(f'(x)+\eta\mu x\right)\cdot\left(\underbrace{f(x)+f''(x)}_{=0}\right)$

$=0, \quad x\in[0,\pi/2)$

Άρα $F(x)=c, \quad x\in[0,\pi/2)$

(iv) $(1)\Rightarrow f'(0)=-f(0)\cdot g(0)=-1\cdot 0=0$

$F(0)=\left(f(0)-\sigma υν 0\right)^2+\left(\underbrace{f'(0)}_{=0}+\underbrace{\eta\mu 0}_{=0}\right)^2=(1-1)^2=0.$

Άρα $F(x)=0 \quad , x\in[0,\pi/2)$.

$\left(f(x)-\sigma υν x\right)^2+\left(f'(x)+\eta\mu x\right)^2=0\Leftrightarrow$

$f(x)=\sigma υν x \qquad f'(x)=-\eta\mu x \qquad x\in[0,\pi/2)$

Scanned with CamScanner