ασκ. 5

$$3x^4 + x + 2\ln x = 4$$

προφανής λύση $x = 1$.

Έστω $A(x) = 3x^4 + x + 2\ln x$

$$A'(x) = 12x^3 + 1 + \frac{2}{x} > 0$$

$\forall x > 0 \Rightarrow A(x) \uparrow$ στο $(0, +\infty)$

Άρα 1-1 ⇒ η λύση μοναδική.

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $\quad$ $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

$\forall x > 0$

ασκ. 6

$$f(x) = \frac{e^{ax}}{x^2 + a^2}, \quad D_f = \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = \frac{e^{ax} \cdot a \cdot (x^2 + a^2) - e^{ax} \cdot (2x)}{(x^2+a^2)^2} =$$

$$= \frac{e^{ax}(ax^2 + a^3 - 2x)}{(x^2+a^2)^2} = \frac{e^{ax}(ax^2 - 2x + a^3)}{(x^2+a^2)^2}$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot a^4 = 4 \cdot (1 - a^4)$$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 - a^4 > 0 \Leftrightarrow a^4 < 1 \Leftrightarrow |a| < 1 \Leftrightarrow -1 < a < 1, a \neq 0$

$\Delta < 0 \Leftrightarrow \boxed{a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}$, $\Delta = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$

$\Delta \leq 0 \Rightarrow$ $f'(x)$ ομοσ. του a

Αν $a > 0$

$f'(x)$	+
$f(x)$	↗

$\Rightarrow a \geq 1$

Αν $a < 0$

$f'(x)$	−
$f(x)$	↘

$a \leq -1$

ασκ.6 (β)

i) $x>0 \Rightarrow e^x > x^2+1$

$$f(x)=\frac{e^{ax}}{x^2+a^2}\ ,\quad \begin{cases} a\geq 1 \Rightarrow f \uparrow \\ a\leq -1 \Rightarrow f \downarrow \end{cases}$$

Για $a=1 \Rightarrow f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$ $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$

$$f(0)=\frac{e^0}{1}=1.$$

$\forall x>0 \Rightarrow f(x)>f(0) \Rightarrow$

$$\frac{e^x}{x^2+1}>1 \Rightarrow \dots$$

ασκ.8 $\quad f(x)=e^x-e^{-x}+2ημx\ ,\ x\in\mathbb{R}$

f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=e^x+e^{-x}+2συνx=e^x+\frac{1}{e^x}+2συνx$$

Είναι $e^x+\dfrac{1}{e^x}\geq 2$ και το "=" ισχύει για $x=0$

$2\geq 2συνx$. το "=" ισχύει μόνο για $x=2kπ$

		0	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x)=+\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0.$

$$-2\leq 2ημx\leq 2 \Rightarrow \underbrace{e^x-e^{-x}-2}\leq f(x)\leq 2+e^x-e^{-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x-e^{-x}-2)=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$