Μια σημαντική εφαρμογή του σχολ. βιβλίου = Θεώρημα.

Αν $f'(x)=f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ τότε $f(x)=c\cdot e^x$

Απόδειξη | Έστω $A(x)=\frac{f(x)}{e^x}$. $A'(x)=\frac{f'(x)\cdot e^x-f(x)\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}\overset{(Y)}{=}0$

Αφού $A'(x)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $A(x)=c$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{f(x)}{e^x}=c$ $\Leftrightarrow$ $f(x)=c\cdot e^x$.

Ασκ.3 | $f(0)=2$, $f(x)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$. $f'(x)=f(x)\cdot\ln f(x)\overset{f(x)\neq 0}{\Longleftrightarrow}\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln f(x)\Leftrightarrow$

$(\ln f(x))'=\ln f(x)$, από γνωστή εφαρμογή $\Rightarrow$ $\ln f(x)=c\cdot e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ έχω $\ln f(0)=c\cdot e^0\Leftrightarrow \ln 2=c\Rightarrow \ln f(x)=(\ln 2)e^x\Rightarrow$

$e^{\ln f(x)}=e^{(\ln 2)\cdot e^x}\Leftrightarrow f(x)=\left(e^{\ln 2}\right)^{e^x}=2^{e^x}$

Να βρείτε: f 2φ παρ/μη
$f(0)=1$, $f'(0)=2$

$f''(x)=f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$f''(x)+f'(x)=f'(x)+f(x)\Leftrightarrow$

$(f'(x)+f(x))'=f'(x)+f(x)$

Από γνωστή εφαρμογή $\Rightarrow$ $f'(x)+f(x)=c\cdot e^x$

$f'(0)+f(0)=c\cdot e^0\Leftrightarrow c=3$

$f'(x)+f(x)=3e^x\Leftrightarrow$

$f'(x)\cdot e^x+f(x)\cdot(e^x)'=3\cdot e^{2x}\Leftrightarrow$

$(f(x)\cdot e^x)'=\left(\frac{3}{2}\cdot e^{2x}\right)'\Leftrightarrow$

$f(x)\cdot e^x=\frac{3}{2}\cdot e^{2x}+c_1$

$f(0)\cdot e^0=\frac{3}{2}\cdot e^0+c_1\Leftrightarrow 1=\frac{3}{2}+c_1\Rightarrow c_1=-\frac{1}{2}$

$f(x)\cdot e^x=\frac{3}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{f(x)=\frac{3e^x}{2}-\frac{e^{-x}}{2}\quad \forall x\in\mathbb{R}}$

Scanned with CamScanner

Άσκ. 4 $\quad f''(x)+f(x)=0 \Leftrightarrow \quad f(0)=0,\ f'(0)=1$

$f''(x) = -f(x) \Leftrightarrow$

$2f''(x)\cdot f'(x) = -2f'(x)\cdot f(x)$

$\left[(f')^2(x)\right]' = -\left(f^2(x)\right)' \Leftrightarrow$

$\left[(f')^2(x) + f^2(x)\right]' = 0 \Leftrightarrow$

$(f')^2(x) + f^2(x) = c$

$(f'(0))^2 + f^2(0) = c \Rightarrow c=1$

$(f'(x))^2 + f^2(x) = 1$

2η μέθοδος: Έστω $A(x)=(f'(x))^2+f^2(x)$

$A'(x) = \cdots\cdots = 0.$

β) $f(x)=\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}.$

Έστω $B(x)=f(x)-\eta\mu x$

Έστω $\Gamma(x)=(B'(x))^2+B^2(x)$

$\Gamma'(x) = 2B'(x)\cdot B''(x) + 2B(x)\cdot B'(x) =$

$= 2B'(x)\cdot\left[B''(x)+B(x)\right] = 0$

Όμως $B'(x) = f'(x)-\sigma\upsilon\nu x$. $\quad B''(x) = f''(x)+\eta\mu x$

$B''(x)+B(x) = f''(x)+f(x) = 0$

Άρα $\Gamma'(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \Gamma(x)=c\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Gamma(0) = (\underbrace{B'(0)}_{0})^2 + \underbrace{B^2(0)}_{0} = 0. \Rightarrow \Gamma(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$(B'(x))^2 + B^2(x) = 0$

$B(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Scanned with CamScanner

ασκ.1 / Σελ. 2

$f''(x) = -f(x)$ α) $h(x) = f^2(x) + (f'(x))^2$, $f(0) = 5$, $f'(0) = 7$

α) Θεωρώ $h'(x) = \dots = 0$

β) Ν.δ.ο. $f^2(a) - f^2(b) = (f'(b))^2 - (f'(a))^2 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

$f^2(a) + (f'(a))^2 = f^2(b) + (f'(b))^2$ ή $h(a) = h(b)$ το οποίο ισχύει $\forall a, b \in \mathbb{R}$ διότι $h(x) = c$ στο $\mathbb{R}$

(γ) Ν.δ.ο. $f(x) = 5 \cdot \text{συν}x + 7\text{ημ}x$. Έστω

$A(x) = (f(x) - 5\text{συν}x - 7\text{ημ}x)^2 + (f'(x) + 5\text{ημ}x - 7\text{συν}x)^2$

$\boxed{A'(x) = 0}$ $A'(x) = 2(f(x) - 5\text{συν}x - 7\text{ημ}x) \cdot (f'(x) + 5\text{ημ}x - 7\text{συν}x) + 2(f'(x) + 5\text{ημ}x - 7\text{συν}x) \cdot (f''(x) + 5\text{συν}x + 7\text{ημ}x)$

$= 2(f'(x) + 5\text{ημ}x - 7\text{συν}x) \cdot [f(x) - 5\text{συν}x - 7\text{ημ}x + f''(x) + 5\text{συν}x + 7\text{ημ}x] = 0$

Άρα $A'(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow A(x) = c$

Όμως $A(0) = (f(0) - 5 \cdot \text{συν}0 - \cancel{7\text{ημ}0})^2 + (f'(0) + \cancel{5\text{ημ}0} - 7\text{συν}0)^2 = 0 + 0 = 0$

Άρα $A(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 5\text{συν}x + 7\text{ημ}x$ και $f'(x) = -5\text{ημ}x + 7\text{συν}x$

Scanned with CamScanner

Άσκ. 6

$f'''(x) = g'''(x)$, $x \in \mathbb{R}$ $\quad f(0) = g(0) \quad f'(0) = g'(0) \quad f''(0) \neq g''(0)$

(α) $f''(x) = g''(x) + a$, $x \in \mathbb{R}$

$\left(f'(x)\right)' = \left(g'(x) + ax\right)' \Leftrightarrow$

$f'(x) = g'(x) + ax + c_1 \quad (1)$

$\cancel{f'(0)} = \cancel{g'(0)} + 0 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$

$(1) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + ax \Leftrightarrow$

$f(x) = g(x) + \frac{1}{2}ax^2 + c_2$

Για $x = 0 \Rightarrow \ldots \; c_2$

$f(x) = g(x) + \frac{1}{2}ax^2$

$f(x) = g(x) + Ax^2$ ο.ε.δ.

(β) Θ.δ.ο. $\exists$ μοναδικό x_0 με $\left\{\begin{matrix} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{matrix}\right\}$

Παρατηρώ (από (γ)) $\left.\begin{matrix} f'(0) = g'(0) \\ (\;\text{"}\;) \quad f(0) = g(0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_0 = 0$

Από προηγ. ερώτημα έχω

$f(x) = g(x) + Ax^2$

Τώρα λύνω την εξίσωση

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$

$g(x) + Ax^2 = g(x) \Leftrightarrow$

$Ax^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ μοναδική

Scanned with CamScanner

ασκ. 7) $f(0)=1$

$$f(x)\cdot f'(x)=e^{2x} \Leftrightarrow$$
$$2f(x)\cdot f'(x)=2e^{2x} \Leftrightarrow$$
$$\left(f^2(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)' \Leftrightarrow$$
$$f^2(x)=e^{2x}+c$$
$$f^2(0)=e^0+c \Leftrightarrow$$
$$1=1+c \Leftrightarrow c=0$$
$$f^2(x)=e^{2x} \Rightarrow$$
$$|f(x)|=e^x \quad (1)$$

Λύνω την εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow$

$|f(x)|=0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} e^x=0$ αδύνατη

f συνεχής και $f\neq 0$ στο $\mathbb{R}$

Από σχόλιο Bolz. $\Rightarrow$

διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$,

αφού $f(0)=1>0 \Rightarrow$

$f(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$

$(1) \Rightarrow f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$

ασκ. 8

$f(0)=2$

$$f'(x)+x\cdot f(x)=x \quad (1), \quad x\in\mathbb{R}$$
$$f'(x)\cdot e^{x^2/2}+x\cdot e^{x^2/2}\cdot f(x)=x\cdot e^{x^2/2} \Leftrightarrow$$
$$\left(f(x)\cdot e^{x^2/2}\right)'=x\cdot e^{x^2/2} \Leftrightarrow$$
$$\left(f(x)\cdot e^{x^2/2}\right)'=\left(e^{x^2/2}\right)' \Leftrightarrow$$
$$f(x)\cdot e^{x^2/2}=e^{x^2/2}+c$$
$$f(0)\cdot e^0=e^0+c \Leftrightarrow 2=1+c \Leftrightarrow \boxed{c=1}$$

$f'(x)+g(x)\cdot f(x)=A(x)$

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)'=x$$