Θεώρημα: Αν f συνεχής σε διάστημα Δ, $f'(x)=0$ $\forall x$ στο εσωτερικό του Δ.
Τότε $f(x)=c$, $\forall x \in \Delta$.

Έστω τυχαία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$.

Από ΘΜΤ. $\Rightarrow \exists\, \xi \in (x_1, x_2)$: $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

Αφού $f'(x)=0$ $\forall x \in$ εσωτ. του Δ

$\Rightarrow \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0 \Leftrightarrow$
$f(x_2)=f(x_1)$.

Αν $x_1 > x_2 \rightarrow$ ομοίως $f(x_1)=f(x_2)$.

Αν $x_1 = x_2 \Rightarrow$ προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$

Άρα σε κάθε περίπτωση $f(x_1)=f(x_2)$. Άρα f σταθερή στο Δ.

1) $f'(x)=0$, $\forall x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow f(x)=c$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$ (Λ)

2) $f'(x)=0$, $\forall x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow f(x)=\begin{cases} c_1, & x \in (-\infty,0) \\ c_2, & x \in (0,+\infty) \end{cases}$

Πόρισμα. Αν f, g συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ $\forall x$ στο εσωτερικό του $\Delta \Rightarrow$

$f(x) = g(x) + c$ $\forall x \in \Delta$. Απόδ.) $f'(x) - g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(f(x) - g(x)\right)' = 0$ $\forall x \in \Delta$.

$\Rightarrow f(x) - g(x) = c$ $\forall x \in \Delta$.

1) $(x-2) \cdot f'(x) = 2x^2 - 5x + 2$ (1) $\forall x \in \mathbb{R}$

Για $x \neq 2 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x-2} = \dfrac{(2x-1)\cdot\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = 2x - 1 \Rightarrow$

$f'(x) = \left(x^2 - x\right)'$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + c_1, & x < 2 \\ c_3, & x = 2 \\ x^2 - x + c_2, & x > 2 \end{cases}$$

Αρχικά f συνεχής $\Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow$

$2 + c_1 = 2 + c_2 = c_3 \Rightarrow \begin{cases} \cancel{2} + c_1 = \cancel{2} + c_2 \\ c_3 = 2 + c_1 \end{cases}$

f παρ/μη $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - x + c_1 - c_3}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - x + c_2 - c_3}{x-2} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - x - 2}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - x - 2}{x-2}$ ok.

Άρα $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + c_1, & x \neq 2 \\ 2 + c_1, & x = 2 \end{cases}$

Ασκ. 2 $\quad 2f'(x) + 3x\cdot f(x) = 5x \,,\, (1) \quad x \in \mathbb{R} \quad , \quad f(0) = 1$

$$f'(x) + \frac{3x}{2} f(x) = \frac{5x}{2} \Leftrightarrow$$

$$f'(x)\cdot e^{3x^2/4} + \frac{3x}{2}\cdot e^{3x^2/4}\cdot f(x) = \frac{5x}{2}\cdot e^{3x^2/4} \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)\cdot e^{3x^2/4}\right)' = \frac{5}{2}\cdot x\cdot e^{3x^2/4} = \frac{5}{3}\cdot\frac{3x}{2}\cdot e^{3x^2/4} \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)\cdot e^{3x^2/4}\right)' = \left(\frac{5}{3}\cdot e^{3x^2/4}\right)' \xLeftrightarrow{x\in\mathbb{R}}$$

$$f(x)\cdot e^{3x^2} = \frac{5}{3}\cdot e^{3x^2} + c \,, \quad x \in \mathbb{R}$$

Για $x=0 \Rightarrow f(0)\cdot e^0 = \frac{5}{3}\cdot e^0 + c \Leftrightarrow 1 = \frac{5}{3} + c \Rightarrow c = -\frac{2}{3}$

$\rightarrow f(x) = \ldots$

Γενική Μέθοδος

$$f'(x) + g(x)\cdot f(x) = A(x) \Leftrightarrow$$

Θεωρώ $G(x)$ παράγουσα της $g(x)$

$$f'(x)\cdot e^{G(x)} + g(x)\cdot e^{G(x)}\cdot f(x) = e^{G(x)}\cdot A(x)$$

$$\left(f(x)\cdot e^{G(x)}\right)' = e^{G(x)}\cdot A(x)$$