Ασκ. 14) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad |f'(x)| \geq 1 \ (1) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

i) $$|f(x_1)-f(x_2)| \geq |x_1-x_2| \ (2)$$

α) Αν $x_1 = x_2$ τότε η (2) ισχύει ως ισότητα

β) Αν $x_1 < x_2$, από Θ.Μ.Τ. $\Rightarrow \exists\, \xi_1 \in (x_1, x_2)$:

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(\xi_1) \Rightarrow \frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{|x_1-x_2|} = |f'(\xi_1)| \overset{(1)}{\geq} 1 \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)| \geq |x_1-x_2|$$

γ) Αν $x_1 > x_2$, ομοίως

(ii) (1) $\forall\, y_1, y_2 \in f(\mathbb{R}) \Rightarrow |f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)| \leq |y_1 - y_2| \ (3)$

Για τα τυχαία $y_1, y_2 \in f(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$

$$(2) \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)| \geq |x_1-x_2| \Rightarrow |y_1-y_2| \geq |f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)| \text{ ο.ε.δ.}$$

(2) Έχω δείξει ότι $\forall\, y_1, y_2 \in f(\mathbb{R})$ ισχύει $|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)| \leq |y_1 - y_2| \ (3)$

Έστω τυχαίο $y_0 \in f(\mathbb{R})$. Θ.δ.ο. $\lim_{y\to y_0}[f^{-1}(y)] = f(y_0)$. Στην (3) βάζω $y_1 = y$, $y_2 = y_0$

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \leq |y-y_0| \Leftrightarrow -|y-y_0| \leq f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) \leq |y-y_0|$$

$-|y-y_0| \to 0$, $\quad |y-y_0| \to 0$

Από κριτήριο Παρεμβολής $\Rightarrow \lim_{y\to y_0}\left(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right) = 0$

(θ) $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$.

Δείχνω "εύκολα" ότι $f \nearrow \Rightarrow 1-1$

$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$

$|f'(x)| = 5x^4 + 3x^2 + 1 \geq 1$

από (α) ερώτημα $\rightarrow f^{-1}$ είναι συνεχής.

Ασκ. 1 $\quad f(1) = f(0) + \frac{1}{2}, \quad f'(0) > 0$

α) $f'(a) = a$

Έστω $A(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$

♡ $A(x)$ συνεχής στο $[0,1]$

♡ $A'(x) = f'(x) - x, \quad x \in (0,1)$

♡ $\left.\begin{array}{l} A(0) = f(0) \\ A(1) = f(1) - \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$A(0) - A(1) = f(0) - f(1) + \frac{1}{2} = 0$

$A(0) = A(1)$

Από Θ. Rolle $\Rightarrow \exists\, a \in (0,1) : f'(a) = a$

β) $f'(b) = 2b$

Έστω $B(x) = f'(x) - 2x$

$B(0) = f'(0) > 0$

$B(a) = f'(a) - 2a = a - 2a = -a < 0$

$B(x)$ συνεχής στο $[0,a]$. Από Θ. Bolzano $\Rightarrow$

$\exists\, b \in (0,a) \subseteq (0,1) : B(b) = 0$ ο.ε.δ.

ασκ. 6) $f(0)=0$, $f(1)=3$, $f'(0)=f'(1)=0$

α) Από ΘΜΤ $\to \exists\, x_1 \in (0,1): \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x_1)=3$

β) Έχω $f'\left(\frac{1}{2}\right)=3$

$$f''(x_2) = \frac{f'\left(\frac{1}{2}\right)-f'(0)}{\frac{1}{2}-0} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

γ) 1η περ. $0 < x_1 < \frac{1}{2}$

$$f''(x_3) = \frac{f'(x_1)-f'(0)}{x_1-0} = \frac{3}{x_1} > 6$$

$0 < x_1 < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x_1} > 2 \Rightarrow \frac{3}{x_1} > 6$

Άρα $|f''(x_3)| > 6$

2η περ. $\frac{1}{2} < x_1 < 1$

$$f''(x_3) = \frac{f'(1)-f'(x_1)}{1-x_1} = \frac{-3}{1-x_1}$$

$\frac{1}{2} < x_1 < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} > -x_1 > -1 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2} > 1-x_1 > 0 \Leftrightarrow 2 < \frac{1}{1-x_1} \Leftrightarrow$

$-6 > \frac{-3}{1-x_1} \to 6 < \left|\frac{-3}{1-x_1}\right|$

Scanned with CamScanner