$\boxed{6}$ Να λυθεί η εξίσωση: $3^x+5^x=6^x+2^x \; (1) \Leftrightarrow 3^x-2^x=6^x-5^x \; (2)$

Έστω η συνάρτηση $A(t)=t^x$.

$A(t)$ συνεχής στο $[2,3]$ & στο $[5,6]$

$A'(t)=x\cdot t^{x-1}$ στο $(2,3)$ & στο $(5,6)$

Από Θ.Μ.Τ. $\Rightarrow \exists\, \xi_1 \in (2,3)$, $\xi_2 \in (5,6)$:

$$\frac{3^x-2^x}{3-2}=x\cdot\xi_1^{x-1}, \quad \frac{6^x-5^x}{6-5}=x\cdot\xi_2^{x-1}$$

$(2) \Leftrightarrow x\cdot\xi_1^{x-1}=x\cdot\xi_2^{x-1} \Leftrightarrow$

$x=0$ ή $\xi_1^{x-1}=\xi_2^{x-1} \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{x-1}=1 \Leftrightarrow$$

$\frac{\xi_1}{\xi_2}=1 \Leftrightarrow$ ή $x-1=0$

$x=1$

$\xi_1=\xi_2$

άτοπο διότι

τα ξ_1, ξ_2 ανήκουν σε

διαφορετικά διαστήματα

Παρατηρώ ότι οι λύσεις $x=0$, $x=1$ επαληθεύουν την (1), άρα οι λύσεις είναι μοναδικές.

$2^{ος}$ τρόπος $\quad A''(t)=x\cdot(x-1)\cdot t^{x-2}$

16 $f'(2) = f'(-2) = -2$ (1)

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(-x)+4x}{x-2} = 0 \quad (2)$$

α) Έστω $A(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)+4x}{x-2}$ · $\lim_{x\to 2} A(x) = 0$

$f(x) - f(-x) = (x-2)\cdot A(x) - 4x$.

$\lim_{x\to 2}\left[(x-2)\cdot A(x) - 4x\right] = 0\cdot 0 - 4\cdot 2 = -8$

Άρα $\lim_{x\to 2}\left(f(x)-f(-x)\right) = -8$ } $\Rightarrow f(2) - f(-2) = -8$ ο.ε.δ.

f συνεχής

β) $g(x) = \left(f'(x)+2\right)\cdot e^{-f(x)}$

Έχω $g(2) = 0$

$g(-2) = 0$

Έστω $B(x) = f(x) + 2x$

$B(2) = f(2) + 4$

$B(-2) = f(-2) - 4$

$B(2) - B(-2) = f(2) - f(-2) + 8 \overset{(a)}{=} 0$

Άρα $B(2) = B(-2)$

$B(x)$ συνεχής στο $[-2,2]$

$B'(x) = f'(x) + 2$, $x \in (-2,2)$

$B(2) = B(-2)$

Από Θ. Rolle $\to \exists$ ρίζα της $B'(x)$ στο $(-2,2)$

Άρα έχω δείξει 3 ρίζες τουλάχιστον της $g(x) = 0$

γ) $f''(x) = 2f'(x) + \left(f'(x)\right)^2$

$g'(x) = f''(x)\, e^{-f(x)} - \left(f'(x)+2\right) e^{-f(x)} \cdot f'(x)$

$= e^{-f(x)} \left[f''(x) - \left(f'(x)+2\right)\cdot f'(x)\right]$

ΤΕΛΟΣ ΔΟΚΙΜΗΣ.

ΚΑΛΟ! Θεώρημα Rolle για την $g(x)$ στο $[-2, x_0]$, $[x_0, 2]$

x_0 του ερωτήματος (β).