ασκ. 10 $\quad f(a)=a, \quad f(b)=b. \quad f$ συνεχής

α) $\exists x_0 \in (a,b): \quad f(x_0) = a+b-x_0$

Έστω $A(x) = f(x) + x - a - b$.

♡ $A(x)$ συνεχής στο $[a,b]$

♡ $A(a) = f(a) + \cancel{a} - \cancel{a} - b = a-b<0$

$A(b) = f(b) + \cancel{b} - a - \cancel{b} = b-a>0$

Από Θ. Bol. $\Rightarrow \exists x_0 \in (a,b): A(x_0)=0$

ο.ε.δ.

(β) Θ.δ.ο. $\exists x_1, x_2 \in (a,b)$ με

$f'(x_1)\cdot f'(x_2) = 1$

f συνεχής στο $[a,x_0] \subseteq [a,b]$

f παρ/μη στο $(a,x_0) \subseteq (a,b)$ προηγ. ερώτ.

Από Θ.Μ.Τ. $\Rightarrow \exists x_1 \in (a,x_0)$:

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} = \frac{a+b-x_0-a}{x_0-a} = \frac{b-x_0}{x_0-a}$$

Ομοίως από Θ.Μ.Τ. $\Rightarrow \exists x_2 \in (x_0,b)$:

$$f'(x_2) = \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0} = \frac{b-(a+b-x_0)}{b-x_0} = \frac{x_0-a}{b-x_0}$$

$$f'(x_1)\cdot f'(x_2) = \frac{b-x_0}{x_0-a}\cdot\frac{x_0-a}{b-x_0} = 1 \quad \text{ο.ε.δ}$$

$f'(x_1) + f'(x_2) = 0$

ασκ.4 f 2φ. παρ/μη $a<\beta<\gamma<\delta$ $f(a)+f(\delta)=f(\beta)+f(\gamma)$, (1)

και $a+\delta=\beta+\gamma$. (1') ν.δ.ο. $\exists x_0: f''(x_0)=0$

(1) $f(a)-f(\beta)=f(\gamma)-f(\delta)$ (2) . Από (1') $\Rightarrow$ $a-\beta=\gamma-\delta$ (3)

Από Θ.Μ.Τ. $\Rightarrow \exists x_1 \in (a,\beta)$: $f'(x_1)=\dfrac{f(a)-f(\beta)}{a-\beta}$

Από >> $\Rightarrow \exists x_2 \in (\gamma,\delta)$: $f'(x_2)=\dfrac{f(\gamma)-f(\delta)}{\gamma-\delta}$

Από (2), (3) $\Rightarrow$ $f'(x_1)=f'(x_2)$. Από Θ. Rolle $\Rightarrow \exists x_0 \in (x_1,x_2)$: $f''(x_0)=0$

ασκ.12 $f(x)=e^x+e^{-x}-\frac{1}{2}x^2+x-1$

Θα εργαστώ με απαγωγή σε άτοπο. Έστω $\exists$ a,β,γ, $a<\beta<\gamma$ ώστε τα σημεία $A(a,f(a))$, $B(\beta,f(\beta))$, $\Gamma(\gamma,f(\gamma))$ συνευθειακά.

Τότε πρέπει $\lambda_{AB}=\lambda_{B\Gamma}$ (1), με $\lambda_{AB}=\dfrac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a}$, $\lambda_{B\Gamma}=\dfrac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$.

Από Θ.Μ.Τ. $\Rightarrow \exists x_1 \in (a,\beta)$: $f'(x_1)=\lambda_{AB}$

>> $\Rightarrow \exists x_2 \in (\beta,\gamma)$: $f'(x_2)=\lambda_{B\Gamma}$

$\xRightarrow{(1)} f'(x_1)=f'(x_2)$

Από Θ.Rolle $\Rightarrow \exists x_0 \in (x_1,x_2)$: $f''(x_0)=0 \Leftrightarrow$

$f'(x)=e^x-e^{-x}-x+1$. $f''(x)=e^x+e^{-x}-1$

$e^{x_0}+\dfrac{1}{e^{x_0}}-1=0 \Leftrightarrow e^{2x_0}+1-e^{x_0}=0 \Leftrightarrow$

$e^{2x_0}-e^{x_0}+1=0$. $\Delta=-3<0$ άτοπο.