Θ.Μ.Τ. (Lagrange)

Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, f παραγ/μη στο (α,β) τότε

$$\exists\, \xi \in (\alpha,\beta) : \quad f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Απόδειξη: Έστω $A(x) = f(x)\cdot(\beta-\alpha) - \big(f(\beta)-f(\alpha)\big)\cdot x$

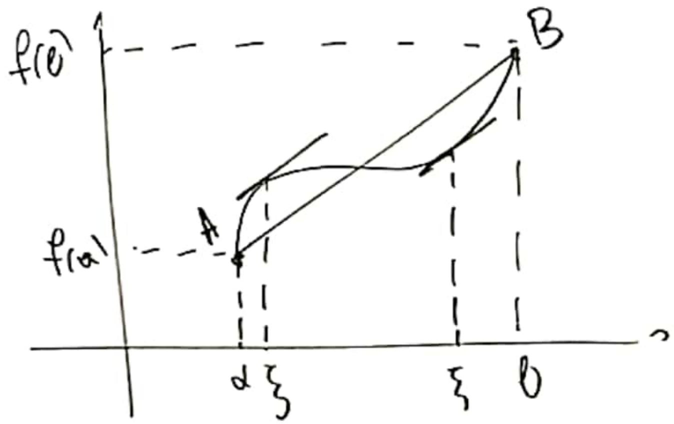
$A(x)$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

$$A'(x) = f'(x)\cdot(\beta-\alpha) - \big(f(\beta)-f(\alpha)\big)$$

$$A(\alpha) = f(\alpha)\cdot(\beta-\alpha) - \big(f(\beta)-f(\alpha)\big)\cdot\alpha = \beta\cdot f(\alpha) - \cancel{\alpha\cdot f(\alpha)} - \alpha\cdot f(\beta) + \cancel{\alpha\cdot f(\alpha)}$$

$$A(\beta) = f(\beta)\cdot(\beta-\alpha) - \big(f(\beta)-f(\alpha)\big)\cdot\beta = \cancel{\beta\cdot f(\beta)} - \alpha\cdot f(\beta) - \cancel{\beta\cdot f(\beta)} + \beta f(\alpha)$$

Από Θ. Rolle $\Rightarrow \exists\, \xi \in (\alpha,\beta) : A'(\xi) = 0.$



$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = \lambda_{AB}$$

$f'(\xi) =$ συντελ. διεύθυνσης της εφαπτομένης στο ξ

1) $|\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta| \leq |\alpha - \beta| \quad (1) \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Αν $\alpha = \beta$ τότε η (1) ισχύει ως ισότητα.

β) Αν $\alpha < \beta$ τότε $(1) \Leftrightarrow \left|\dfrac{\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta}{\alpha - \beta}\right| \leq 1 \quad (2)$

Έστω $A(x) = \eta\mu x$

♡ $A(x)$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

♡ $A'(x) = \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in (\alpha, \beta)$

Από ΘΜΤ $\Rightarrow \exists\, \xi \in (\alpha, \beta) : A'(\xi) = \dfrac{\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta}{\alpha - \beta} \Leftrightarrow$

$\dfrac{\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta}{\alpha - \beta} = \sigma\upsilon\nu\xi \Rightarrow \left|\dfrac{\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta}{\alpha - \beta}\right| = |\sigma\upsilon\nu\xi| \leq 1$

Άρα έδειξα την $(2) \Leftrightarrow (1)$.

γ) Αν $\alpha > \beta$ όμοια στο διάστημα $[\beta, \alpha]$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\eta\mu\sqrt{x+1} - \eta\mu\sqrt{x}\right)$. Από α' ερώτημα $\Rightarrow |\eta\mu\sqrt{x+1} - \eta\mu\sqrt{x}| \leq |\sqrt{x+1} - \sqrt{x}| \quad (3)$

Τώρα $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$

$(3) \Rightarrow -|\sqrt{x+1} - \sqrt{x}| \leq \eta\mu\sqrt{x+1} - \eta\mu\sqrt{x} \leq |\sqrt{x+1} - \sqrt{x}|$

Από Κριτήριο Παρ. $\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\eta\mu\sqrt{x+1} - \eta\mu\sqrt{x}\right) = 0$

Λύση 2

α) $x>0 \Rightarrow \dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x} \quad (1)$

έστω $A(t) = \ln t$ σχής στο $[x, x+1]$. $A'(t) = \dfrac{1}{t}, \quad \forall t \in (x, x+1)$

Από Θ.Μ.Τ. $\Rightarrow \exists \xi \in (x, x+1) : A'(\xi) = \dfrac{\ln(x+1) - \ln x}{x+1-x} \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{\xi} = \ln(x+1) - \ln x.$

Αφού $x < \xi < x+1 \Rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{\xi} > \dfrac{1}{x+1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > \ln(x+1) - \ln x > \dfrac{1}{x+1}$ ο.ε.δ.

β) $\lim\limits_{\nu \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{\nu}\right)$

$(1) \xRightarrow{x=1} \quad \dfrac{1}{2} < \ln 2 - \cancel{\ln 1} < 1$

$(1) \xRightarrow{x=2} \quad \dfrac{1}{3} < \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2} < \dfrac{1}{2}$

$(1) \xRightarrow{x=3} \quad \dfrac{1}{4} < \cancel{\ln 4} - \cancel{\ln 3} < \dfrac{1}{3}$

$\vdots$

$(1) \xRightarrow{x=\nu} \quad \dfrac{1}{\nu+1} < \ln(\nu+1) - \cancel{\ln \nu} < \dfrac{1}{\nu}$

$\dots < \ln(\nu+1) < 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{\nu} \to +\infty$

$\lim\limits_{\nu \to +\infty} \left(\ln(\nu+1)\right) = +\infty$

ασκ.3 $f'(x_1)+f'(x_2) = 2\cdot\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$a \quad \frac{a+b}{2} \quad b$

$$\exists\, x_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right) : \quad f'(x_1) = \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)}{\frac{a+b}{2} - a}$$

$$\exists\, x_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right) : \quad f'(x_2) = \frac{f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b - \frac{a+b}{2}}$$

$$f'(x_1)+f'(x_2) = \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) + f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{b-a}{2}} = \frac{f(b)-f(a)}{\frac{b-a}{2}} = 2\cdot\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ασκ.18 (i) Έστω $A(x) = f(x) - 1 + x$