ασκ.19

$2f^2(x)+1<3f(x)$ $\forall x\in[1,2]$, $f'(x)\neq \frac{1}{2}$ $\forall x\in[1,2]$ $f(x_0)=\frac{1}{2}x_0$

$2f^2(x)-3f(x)+1<0$. Θέτω $f(x)=w$ $2w^2-3w+1<0$

	$\frac{1}{2}$		1	
$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα $\frac{1}{2}<w<1 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}<f(x)<1$ $\forall x\in[1,2]$

Έστω $A(x)=f(x)-\frac{1}{2}x$

$$\left.\begin{array}{l} A(1)=f(1)-\frac{1}{2}>0 \\ A(2)=f(2)-1<0 \end{array}\right\} \text{Θ.Bolz.} \Rightarrow \exists\, x_0\in(1,2):\ A(x_0)=0$$

Θα εργαστώ με απαγωγή σε άτοπο για τη μοναδικότητα.

Έστω x_0, x_1 2 ρίζες της $A(x)$. Από Θ.Rolle $\exists\, \xi\in(x_0,x_1)\subseteq(1,2)$:

$$\left.\begin{array}{l} A'(\xi)=0 \\ A'(x)=f'(x)-\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(\xi)-\frac{1}{2}=0 \text{ άτοπο.}$$

αση.20 $f(0)=f'(0)=0$. $g(x)=(1-x)\cdot f(x)$, $x\in\mathbb{R}$

(i) $g(0)=1\cdot f(0)=0$, $g(1)=(1-1)\cdot f(1)=0$. σχ, 1-1

$g'(x)=-f(x)+(1-x)\cdot f'(x)$. $g'(0)=-f(0)+f'(0)=0$ $\Big\} \to$ g' σχ, 1-1

Από Θ. Rolle για την $g \Rightarrow \exists\ \xi_1\in(0,1)$: $g'(\xi_1)=0$

(ii) $(1-\xi)\cdot f''(\xi)=2f'(\xi)$

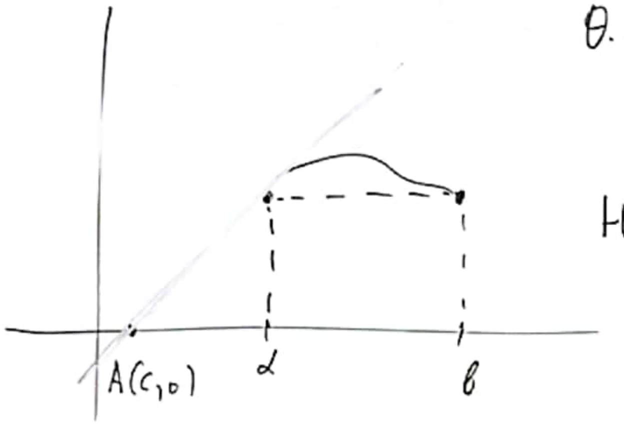
Σκέψη: Θ.δ.ο. έχει ρίζα η εξίσωση $(1-x)\cdot f''(x)-2f'(x)=0 \Leftrightarrow$

$$g''(x)=-f'(x)-f'(x)+(1-x)\cdot f''(x)$$

Από Θ. Rolle για την g' στο $[0,\xi_1] \Rightarrow$

$\exists\ \xi\in(0,\xi_1)$: $g''(\xi)=0$ ο.ε.δ.

άσκ. 14 | $f(a)=f(b)=0$ $\quad c<a$ ή $c>b$. $A(c,0)$



Θ.δ.ο. $\exists\ B(x_0, f(x_0))$ ώστε η εφαπτομένη στο B να διέρχεται από το $A(c,0)$.

Η εξίσωση εφαπτομένης είναι: $\varepsilon:\ y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

Πρέπει $A(c,0)\in(\varepsilon) \iff$

$$0-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(c-x_0) \Rightarrow$$

$$(x_0-c)\cdot f'(x_0)-f(x_0)=0$$

Θ.δ.ο. η εξίσωση: $(x-c)f'(x)-f(x)=0 \quad (1) \iff$

έχει ρίζα $x_0\in(a,b)$

$$\frac{(x-c)f'(x)-f(x)}{(x-c)^2}=0 \iff$$

$$\left(\frac{f(x)}{x-c}\right)'=0 \quad (2)$$

Έστω $A(x)=\dfrac{f(x)}{x-c}$. $\quad A(a)=\dfrac{f(a)}{a-c}=0$, $A(\beta)=0$ $\Big\} \Rightarrow$ Θ. Rolle.

Άρα η (2) έχει ρίζα, άρα η (1) έχει ρίζα $x_0\in(a,b)$

ασκ 15) $f(a)=f(b)=0$. $f'(x_0)+\mu\cdot f(x_0)=0$ $\forall \mu\in\mathbb{R}$

Θ.δ.ο. έχει ρίζα η εξίσωση

$f'(x)+\mu\cdot f(x)=0$ (1) $\iff$

$f'(x)\cdot e^{\mu x}+\mu\cdot e^{\mu x}\cdot f(x)=0\cdot e^{\mu x} \iff$

$f'(x)\cdot e^{\mu x}+\left(e^{\mu x}\right)'\cdot f(x)=0 \iff$

$\left(f(x)\cdot e^{\mu x}\right)'=0$ (2)

Έστω $A(x)=f(x)\cdot e^{\mu x}$.

$A(a)=f(a)\cdot e^{\mu a}=0$

$A(b)=0$

$A'(x)=f'(x)\cdot e^{\mu x}+f(x)\left(e^{\mu x}\right)'$

Από Θ. Rolle $\exists\, x_0\in(a,b)$ ρίζα της (2) $\iff$ (1)

ασκ.16 $2x^5-5x^4+20x^3+ax^2+bx+\gamma=0$

Έστω $\rho_1<\rho_2<\rho_3<\rho_4$ ρίζες

$A'(x)=10x^4-20x^3+60x^2+2ax+b$ (3)

$A''(x)=40x^3-60x^2+120x+2a$ (2)

$A'''(x)=120x^2-120x+120=$ (1)

$120\left(x^2-x+1\right)$ $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$

άτοπο. Άρα 3 το πολύ.

$\lim_{x\to+\infty}A(x)=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}A(x)=-\infty$ ....