Μια συνάρτηση που είναι παρ/μη στο x_0 και η παράγωγός της είναι ασυνεχής στο x_0

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$x \neq 0 \cdot \quad f'(x) = 2x\eta\mu\frac{1}{x} + x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$

$= 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\cancel{2}}\eta\mu\frac{1}{x}}{\cancel{x}} = 0$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0}\left(2x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0,$

$\nexists \lim_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$

$\rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f'(x)$

$\left|2x\eta\mu\frac{1}{x}\right| \leq 2|x|$

Θεώρημα: (Καραθεοδωρή)

Αν $\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ τότε η f είναι παρ/μη στο x_0

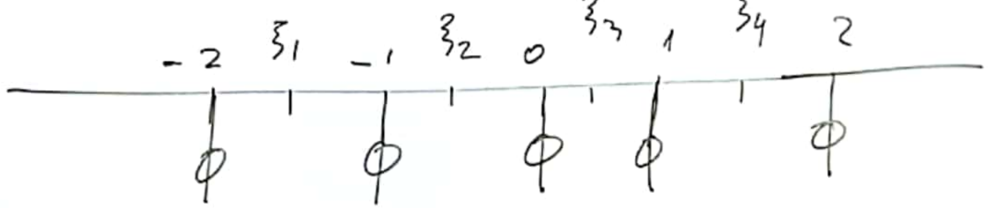
Προσοχή: δεν ισχύει το αντίστροφο βλέπε τη διπλανή συνάρτηση

Ασκ. 4

δ) $f(x) = (x^2-4)(x-x^3) = (x-2)\cdot(x+2)\cdot x\cdot(1-x^2) =$

$= (x-2)(x+2)\,x\cdot(1-x)\cdot(1+x)$

Ρίζες της $f(x)$



Από εφαρμογή Θ. Rolle για $[-2,-1]$, $[-1,0]$ κ.ο.κ. $[1,2]$

$\exists$ 4 τουλάχιστον ρίζες της f'

Αφού f πολυώνυμο $5^{ου}$ βαθμού $\Rightarrow$ f' πολυώνυμο $4^{ου}$ βαθμού

έχει το πολύ 4 ρίζες. Άρα 4 ακριβώς ρίζες

ΆΣΚ. 4 (β) $f(x)=(x-a)^2\cdot(x-\beta)^2\cdot(x-\gamma)^2 \qquad a<\beta<\gamma$

$$f'(x)=2(x-a)\cdot(x-\beta)^2\cdot(x-\gamma)^2+2(x-a)^2\cdot(x-\beta)\cdot(x-\gamma)^2+2(x-a)^2(x-\beta)^2\cdot(x-\gamma)=$$

$$=2\cdot(x-a)(x-\beta)\cdot(x-\gamma)\cdot\Big[\underbrace{(x-\beta)\cdot(x-\gamma)+(x-a)\cdot(x-\gamma)+(x-a)\cdot(x-\beta)}_{A(x)}\Big]$$

Από Θ. Rolle για την f

$f(a)=f(\beta)$, f παρ/μη (a,β), f συνεχής $[a,\beta]$ $\Rightarrow$ $\exists\ \xi_1\in(a,\beta)$ ρίζα της f'.

$\exists\ \xi_2\in(\beta,\gamma)$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ f'

f' έχει επιπλέον a,β,γ.

5 τουλάχιστον.

Αφού f' 5ου βαθμού $\Rightarrow$ 5 ακριβώς

2nd method: Bolzano για την $A(x)$

$A(a)=(a-\beta)(a-\gamma)>0$

$A(\beta)=(\beta-a)(\beta-\gamma)<0$

$A(\gamma)=(\gamma-a)(\gamma-\beta)>0$

$\Rightarrow \exists\ \xi_1\in(a,\beta):\ A(\xi_1)=0$

$\Rightarrow \exists\ \xi_2\in(\beta,\gamma):\ A(\xi_2)=0$

(5) $\underbrace{x^{2\nu+1}+ax+\beta}_{P(x)}=0$ τουλ. 1 ρίζα, το πολύ 3.

$\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^{2\nu+1}) = +\infty \to \exists\, x_1$ κοντά στο $+\infty$: $P(x_1)>0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^{2\nu+1}) = -\infty \to \exists\, x_2$ -> στο $-\infty$; $P(x_2)<0$

$P(x)$ συνεχής στο $[x_2, x_1]$. Από Θ. Bolzano $\to \exists$ ρίζα της $P(x)$.

Για τη μοναδικότητα, θα εργαστώ με απαγωγή σε άτοπο.

Έστω ότι έχει 4 ρίζες. $\rho_1<\rho_2<\rho_3<\rho_4$

Από εφαρμογή Θ.R. $\Rightarrow \exists\, \xi_1 \in (\rho_1,\rho_2)$, $\xi_2 \in (\rho_2,\rho_3)$, $\xi_3 \in (\rho_3,\rho_4)$

ρίζες της $P'(x)$.

Από εφαρμογή του Θ.R. για την $P'(x) \Rightarrow \exists\, \varphi_1 \in (\xi_1,\xi_2)$, $\varphi_2 \in (\xi_2,\xi_3)$ ρίζες της $P''(x)$

$P'(x)=(2\nu+1)x^{2\nu}+a$. $P''(x)=(2\nu+1)\cdot 2\nu\cdot x^{2\nu-1}$ που έχει ακριβώς 1 ρίζα $x=0$ άτοπο.

$(2\nu+1)\cdot 2\nu\cdot x^{2\nu-1}=0 \Leftrightarrow$

$x^{2\nu-1}=0 \Leftrightarrow x=0$

Άρα η $P(x)$ έχει το πολύ 3 ρίζες.

Λύνω την εξίσωση $P'(x)=0 \Leftrightarrow$

$(2\nu+1)x^{2\nu}=-a \Leftrightarrow$

$x^{2\nu}=-\dfrac{a}{2\nu+1}$ 2 ρίζες ή 0 ρίζες.