13. Να βρεθεί συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, με $f(x)>0$, $f(2)=e$, $f'(0)=0$ και $f''(x)-2xf'(x)=2f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση: $f''(x)=2x\cdot f'(x)+2f(x) \Leftrightarrow f''(x)=(2x\cdot f(x))'$, $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$f'(x)=2x\cdot f(x)+c_1 \Rightarrow f'(0)=\cancel{2\cdot 0 f(0)}+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$

$\Rightarrow f'(x)=2xf(x) \Leftrightarrow f'(x)-2xf(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)\cdot e^{-x^2}-2xe^{-x^2}f(x)=0 \Leftrightarrow$

$(f(x)\cdot e^{-x^2})'=0$, $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)\cdot e^{-x^2}=c_2 \overset{x=2}{\Rightarrow} f(2)\cdot e^{-4}=c_2 \Leftrightarrow c_2=e\cdot e^{-4}=e^{-3}$

$\Rightarrow f(x)\cdot e^{-x^2}=e^{-3} \Leftrightarrow f(x)=e^{x^2-3}$, $x\in\mathbb{R}$

Θεώρημα: Αν f συνεχής σε διάστημα Δ, $f'(x)>0$ $\forall x\in\Delta_0$ (: εσωτερικό του Δ).
$\Rightarrow f(x)\uparrow$ στο Δ.

Αν $\Delta=[\alpha,\beta]$, $\Delta_0=(\alpha,\beta)$
$\Delta=(\alpha,\beta)$, $\Delta_0=(\alpha,\beta)$
$\Delta=[\alpha,\beta)$, $\Delta_0=(\alpha,\beta)$
$\Delta=[\alpha,+\infty)$, $\Delta_0=(\alpha,+\infty)$

Απόδ. Έστω $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$
Θ.δ.ο. $f(x_1)<f(x_2)$.

f συνεχής στο $[x_1,x_2]$, $f'(x)>0$ στο (x_1,x_2) } Από ΘΜΤ $\Rightarrow$
$\exists\xi\in(x_1,x_2)$: $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)>0$
Αφού $x_1<x_2 \Rightarrow x_2-x_1>0$ } $f(x_2)-f(x_1)>0 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Άρα $f\uparrow$ στο Δ.

Προσοχή: Δεν ισχύει το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος.
Δηλ. αν $f\uparrow$ σε $\Delta \not\Rightarrow f'(x)>0$ $\forall x\in\Delta_0$

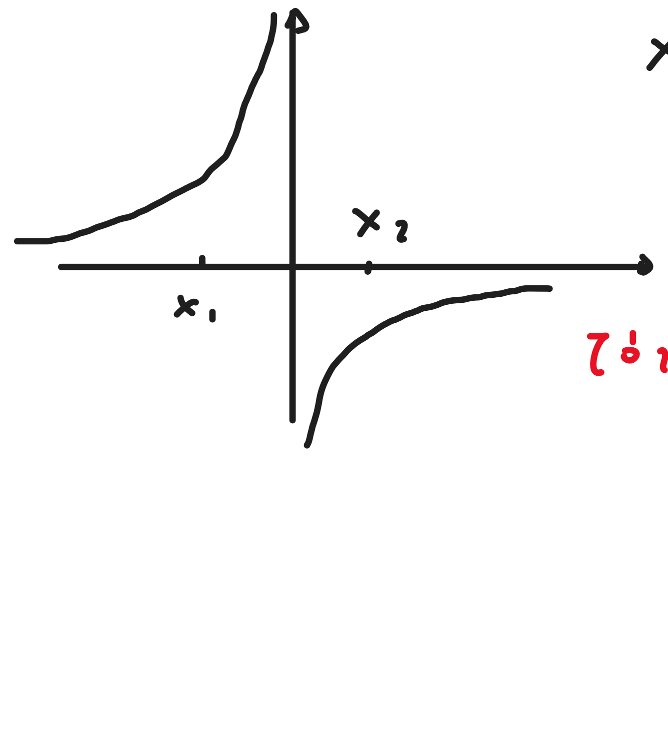
Παρ. $f(x)=x^3\uparrow$ στο $\mathbb{R}$. $f'(x)=3x^2$. $f'(0)=0$. $f'(x)$ όχι θετική $\forall x\in\mathbb{R}$

Γενικά: Αν f συνεχής σε $[\alpha,\beta]$, $f'(x)>0$ $\forall x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$
[Στο x_0 μπορεί να μην είναι παρ/μη ή μπορεί $f'(x_0)=0$ ή ....]
τότε $f\uparrow$ στο $[\alpha,\beta]$.

	α	x_0	β
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	↗		↗

Παρατήρηση 2: Το παραπάνω θεώρημα εφαρμόζεται αποκλειστικά σε διάστημα. π.χ. $f(x)=-\frac{1}{x}$, $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)=\mathbb{R}^*$

$f'(x)=\frac{1}{x^2}>0$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$. Η $f(x)=-\frac{1}{x}$ όχι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}^*$



$x_1<x_2$, $f(x_1)>f(x_2)$. Άρα όχι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}^*$

Συμπέρασμα του θεωρήματος:
Αν f συνεχής σε διάστημα Δ, $f'(x)<0$, $x\in\Delta_0$
τότε $f\downarrow$ στο Δ.