9. Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=\sqrt{e-1}$ και $f'(x)\cdot f(x) - x f^2(x) = x$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση: $f'(x)\cdot f(x) = x f^2(x) + x \Leftrightarrow 2f'(x)\cdot f(x) = 2x\cdot(f^2(x)+1) \Leftrightarrow$

$(f^2(x))' = 2x\cdot(f^2(x)+1) \Leftrightarrow (f^2(x)+1)' = 2x\,(f^2(x)+1) \Leftrightarrow$

$(f^2(x)+1)' - 2x\,(f^2(x)+1) = 0$ $\qquad f'(x) + g(x)\cdot f(x) = A(x)$

$(f^2(x)+1)'e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}\cdot(f^2(x)+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\left[(f^2(x)+1)\cdot e^{-x^2}\right]' = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow (f^2(x)+1)\cdot e^{-x^2} = c$, (2) $\forall x\in\mathbb{R}$.

$(f^2(0)+1)\cdot e^0 = c \Leftrightarrow (e-1+1)\cdot 1 = c \Leftrightarrow c = e$

(2) $\Rightarrow (f^2(x)+1)\cdot e^{-x^2} = e \Leftrightarrow f^2(x)+1 = e^{x^2+1} \Leftrightarrow \boxed{f^2(x) = e^{x^2+1} - 1 \ (3)}$

Πρέπει $e^{x^2+1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2+1} \geq 1 \Leftrightarrow x^2+1 \geq 0$ το οποίο ισχύει

Λύνω την εξίσωση $f(x)=0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} e^{x^2+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \dots$ αδύνατη

Αφού $f(x)\neq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$, f συνεχής στο $\mathbb{R}$ (σαν παρ/μη), από σχόλιο Bolzano διατηρεί πρόσημο· έχω $f(0)=\sqrt{e-1}>0 \Rightarrow$ $f(x)>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$. Από (3) $\Rightarrow |f(x)| = \sqrt{e^{x^2+1}-1} \Rightarrow f(x) = \sqrt{e^{x^2+1}-1}$

10. Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=2$ και $f'(x) = \frac{x-1}{x}\cdot f(x)$ (1) για κάθε $x>0$.

Λύση: $f'(x) - \frac{x-1}{x}\cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow$ $\qquad -\frac{x-1}{x} = -\left(1-\frac{1}{x}\right) = -(x-\ln x)'$

$f'(x)\cdot e^{-x+\ln x} - \frac{x-1}{x}\cdot e^{-x+\ln x}\cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\left(f(x)\cdot e^{\ln x - x}\right)' = 0 \Leftrightarrow f(x)\cdot e^{\ln x - x} = c \quad \forall x\in\mathbb{R}\dots$

11. Δύο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες με $f(0)=1$, $g(0)=-1$, $f'(x)=g(x)\neq 0$ και $g'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $h(x)=f^2(x)-g^2(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$

β) Να βρεθούν οι συναρτήσεις f και g.

Λύση (α) $h'(x) = 2f(x)\cdot f'(x) - 2g(x)\cdot g'(x) = 2f(x)\cdot g(x) - 2g(x)\cdot f(x) = 0$

Άρα $h'(x)=0 \ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow h(x)=c \quad \forall x\in\mathbb{R}$. ΤΕΛΟΣ

β) $h(0) = f^2(0) - g^2(0) = 1^2 - (-1)^2 = 0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow h(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Άρα $\boxed{f^2(x) = g^2(x)\ (1)}$ Αν $\exists x_0\in\mathbb{R}$ με $f(x_0)=0 \overset{(1)}{\Rightarrow} g(x_0)=0 \Rightarrow g(x_0)=0$ Άτοπο από υποθ.

Άρα $f(x), g(x)\neq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$ και συνεχείς $\Rightarrow$ από σχόλιο Bolzano διατηρούν πρόσημο. Αφού $f(0)=1$, $g(0)=-1 \Rightarrow f(x)>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$, και $g(x)<0 \ \forall x\in\mathbb{R}$. Από (1) $\Rightarrow |f(x)| = |g(x)| \ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$f(x) = -g(x) \ \forall x\in\mathbb{R}$. $\overset{(Y)}{\Longrightarrow} f(x) = -f'(x) \Leftrightarrow f(x)+f'(x)=0 \Leftrightarrow$

$f(x)e^x + e^x\cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x)\cdot e^x)' = 0 \Leftrightarrow f(x)\cdot e^x = C \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

$f(0)\cdot e^0 = c \Rightarrow c=1 \Rightarrow f(x)\cdot e^x = 1 \Leftrightarrow f(x) = e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

$g(x) = -e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

12. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)\neq 0$, παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=2$ και $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

γ) Να βρεθεί η συνάρτηση f.

(α) Για $y=x \Rightarrow f(2x) = f^2(x) \geq 0 \Rightarrow f(2x)\geq 0 \xrightarrow{x=\frac{x}{2}} f(x)\geq 0$

Αν $\exists x_0\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x_0)=0$. Στην αρχική βάζω $y=x_0$

$f(x+x_0) = f(x)\cdot f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x+x_0)=0$, για $x = x-x_0 \Rightarrow f(x)=0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f'(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, άτοπο διότι έχω $f'(0)=2$.

Άρα $f(x)>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

(β) Έστω τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}$. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0)\cdot f(h)-f(x_0)}{h} =$

$f(x_0)\cdot\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h} = f(x_0)\cdot 2$

Ξέρω $f'(0)=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = 2$

$f(x+y) = f(x)\cdot f(y) \xrightarrow[y=0]{x=0} f(0) = f^2(0) \Rightarrow f(0)=1$

Άρα f παρ/μη στο τυχαίο x_0 με $f'(x_0) = 2f(x_0)$

γ) Αφού $f'(x) = 2f(x) \Rightarrow f'(x) - 2f(x) = 0 \Rightarrow \dots$