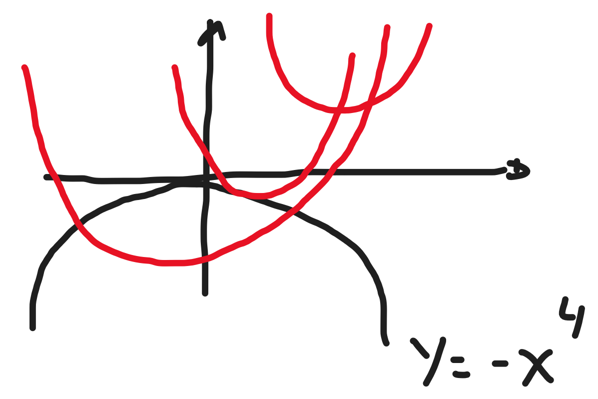
7. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^4+ax^2+bx+\gamma=0$, με $a>0$, έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες. Να δοθεί γεωμετρική ερμηνεία.

$\boxed{\text{Λύση}}$ Θα εργαστώ με απαγωγή σε άτοπο.
Έστω ότι η συνάρτηση $A(x)=x^4+ax^2+bx+\gamma$ έχει 3 ρίζες $\rho_1<\rho_2<\rho_3$. Στο $[\rho_1,\rho_2]$ η $A(x)$ συνεχής (πολυωνυμική)
στο (ρ_1,ρ_2) $A'(x)=4x^3+2ax+b$
$A(\rho_1)=A(\rho_2)$ $\Rightarrow$ Από Θ. Rolle $\Rightarrow$ $\exists\, \xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$: $A'(\xi_1)=0$
ομοίως $A'(\xi_2)=0$.
$A''(x)=12x^2+2a$. Από Θ. Rolle στο $[\xi_1,\xi_2]$ $\Rightarrow$ $\exists\, \xi_3\in(\xi_1,\xi_2)$:
$A''(\xi_3)=0$. όμως η εξίσωση $A''(x)=0 \iff 12x^2+2a=0 \iff$
$12x^2=-2a \iff x^2=-\frac{a}{6}$ αδύνατη λόγω $a>0$. Άτοπο.
Άρα η εξίσωση $A(x)=0$ έχει το πολύ 2 ρίζες.

Γεωμετρική ερμηνεία: $x^4+ax^2+bx+\gamma=0 \iff ax^2+bx+\gamma=-x^4$ (1)
Οι λύσεις της (1), γεωμετρικά είναι οι τετμημένες των σημείων τομής των συναρτήσεων $f(x)=ax^2+bx+\gamma$ και $g(x)=-x^4$.
↳ παραβολή με τα κοίλα πάνω



Ερώτηση Γ. $h(x)=ax^4+bx^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon$

9. α) Μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ με $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ δύο ρίζες στο Δ.

$\boxed{\text{Λύση}}$ Θα εργαστώ με απαγωγή σε άτοπο.
Έστω ότι η εξίσωση έχει 3 ρίζες $\rho_1<\rho_2<\rho_3$.
Από Θ. Rolle $\Rightarrow$ $f'(x)=0$ έχει 2 τουλ. ρίζες ξ_1,ξ_2.
$\rho_1<\xi_1<\rho_2<\xi_2<\rho_3$.
Πάλι από Θ. Rolle η $f''(x)$ έχει τουλάχ. 1 ρίζα $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(\rho_1,\rho_3)\subset\Delta$
Άτοπο διότι $f''(x)\neq 0$ $\forall x\in\Delta$. από (υ).

β) Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=e^x+e^{-x}$ και $g(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-2$ έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

$\boxed{\text{Λύση}}$ Έστω $A(x)=f(x)-g(x)=e^x+e^{-x}-\frac{1}{2}x^2-3x+2$.
$A'(x)=e^x-e^{-x}-x-3$. $A''(x)=e^x+e^{-x}-1$
Λύνω την εξίσωση $A''(x)=0 \iff e^x+\frac{1}{e^x}-1=0 \iff e^{2x}+1-e^x=0 \iff$
$e^{2x}-e^x+1=0$. Θέτω $e^x=y$. $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=1-4=-3<0$.
εξίσωση αδύνατη. Άρα $A''(x)\neq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $A(x)=0$ έχει το πολύ 2 ρίζες.

10. Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία, τα οποία έχουν τετμημένες $x_1\in(-\pi,0)$ και $x_2\in(0,\pi)$.

$\boxed{\text{Λύση}}$ Έστω $A(x)=f(x)-g(x)$. Θ.δ.ο. η εξίσωση $A(x)=0$ έχει 2 ακριβώς λύσεις.
$A(0)=0^2-0\cdot\eta\mu 0-\sigma\upsilon\nu 0=-1<0$
$A(-\pi)=(-\pi)^2-(-\pi)\cdot\eta\mu(-\pi)-\sigma\upsilon\nu(-\pi)=\pi-\cancel{\eta\mu\pi\,\sigma\upsilon\nu\pi}=\pi>0$
Από Θ. Bolzano $\Rightarrow$ $\exists\, x_1\in(-\pi,0)$: $A(x_1)=0$.
ομοίως εργαζόμαστε στο $[0,\pi]$.
$A'(x)=2x-\eta\mu x-x\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=2x-2\eta\mu x-x\cdot\sigma\upsilon\nu x$
$A''(x)=2-\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x-x\cdot(-\eta\mu x)=2-2\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x$
$\sigma\upsilon\nu x<1$ στα $(-\pi,0)$, $(0,\pi)$ $\Rightarrow$ $2\sigma\upsilon\nu x<2$ $\Rightarrow$ $2-2\sigma\upsilon\nu x>0$
$\eta\mu x>0$ στο $(0,\pi)$ $\Rightarrow$ $x\eta\mu x>0$ στο $(0,\pi)$ $\qquad x\eta\mu x>0$ (+)
$\eta\mu x<0$ στο $(-\pi,0)$ $\Rightarrow$ $x\eta\mu x>0$ $\gg$ $(-\pi,0)$ $\qquad A''(x)>0$ στα $(0,\pi)$, $(-\pi,0)$

Να ολοκληρωθεί η απόδειξη στο σπίτι...!