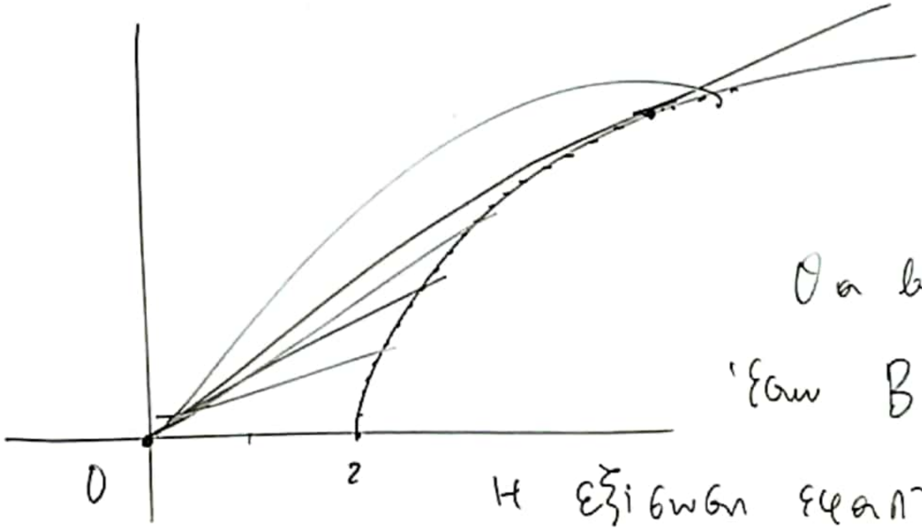
$f(x)=\sqrt{x-2}$ Χρον. στιγμή $t_0=0$. το κινητό είναι στο $A(2,0)$

Σε ποιά θέση της καμπύλης, ο παρατηρητής από το O, θα χάσει την οπτική επαφή με το κινητό.



Θα βρω την εφαπτομένη της C_f που άγεται από το $O(0,0)$

Έστω $B(x_0, \sqrt{x_0-2})$ το σημείο επαφής.

Η εξίσωση εφαπτομένης είναι $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0) \Leftrightarrow$

$$f'(x)=\frac{(x-2)'}{2\sqrt{x-2}}=\frac{1}{2\sqrt{x-2}} \qquad \varepsilon:\ y-\sqrt{x_0-2}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}\cdot(x-x_0)$$

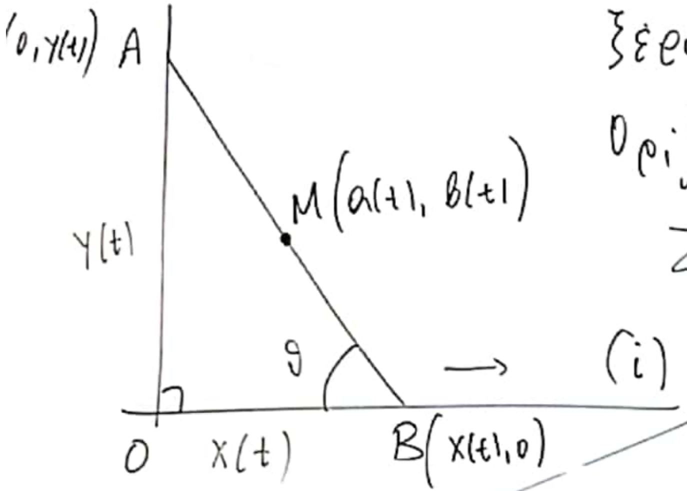
Αφού $O(0,0)\in(\varepsilon) \Leftrightarrow 0-\sqrt{x_0-2}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(0-x_0) \Leftrightarrow$

$$-2(x_0-2)=-x_0 \Leftrightarrow$$

$$2x_0-4=x_0 \Leftrightarrow x_0=4$$

$B(4,\sqrt{2})$

Πρόβλημα 1.



Ορίζω $x(t)$ την απομάκρυνση του B από το O

Ξέρω $x'(t_0)=1,5\ m/s$. $x(t_0)=4m$

Ορίζω $y(t)$ την απομάκρυνση του A από το O.

Ζητώ $y'(t_0)$

(i) $x^2(t)+y^2(t)=5^2 \Rightarrow \cancel{2}x(t_0)\cdot x'(t_0)+\cancel{2}y(t_0)\cdot y'(t_0)=0$

$\Rightarrow 4\cdot 1,5+3\cdot y'(t_0)=0 \Rightarrow \boxed{y'(t_0)=-2\ m/s}$

για $t=t_0 \rightarrow 4^2+y^2(t_0)=5^2 \Rightarrow y(t_0)=3$

(ii) $E(t)=\dfrac{x(t)\cdot y(t)}{2} \Rightarrow E'(t_0)=\dfrac{x'(t_0)\cdot y(t_0)+x(t_0)\cdot y'(t_0)}{2}=\dfrac{1,5\cdot 3+4\cdot(-2)}{2}=\dfrac{4,5-8}{2}=$

$=-\dfrac{3,5}{2}=-1,75\ m^2/s$

(iii) $συνθ(t)=\dfrac{x(t)}{5} \Rightarrow -ημθ(t_0)\cdot θ'(t_0)=\dfrac{x'(t_0)}{5}$

(*) $ημθ(t_0)=\dfrac{y(t_0)}{5}=\dfrac{3}{5}$

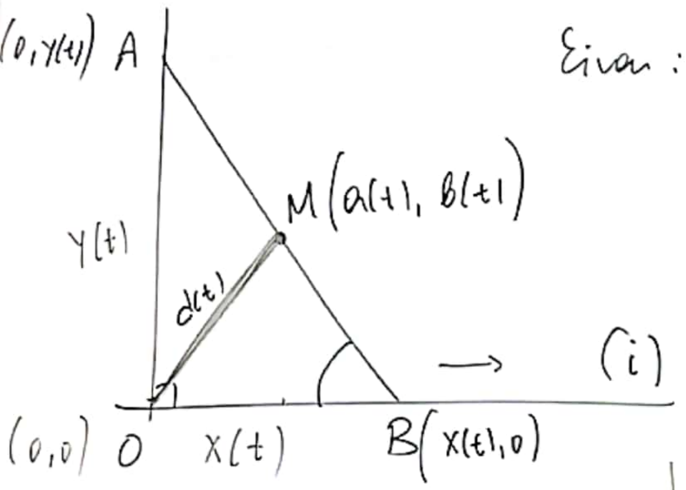
$-\dfrac{3}{5}\cdot θ'(t_0)=\dfrac{1,5}{5} \Rightarrow$

$θ'(t_0)=-\dfrac{1,5}{3}=-0,5\ rad/sec$

(iv) $εφθ(t)=\dfrac{y(t)}{x(t)} \Rightarrow$

$\dfrac{1}{συν^2θ(t_0)}\cdot θ'(t_0)=\dfrac{y'(t_0)\cdot x(t_0)-y(t_0)\,x'(t_0)}{x^2(t_0)}$

Πρόβλημα 1.



(iv) Ορίζω $a(t)$, $b(t)$ τις συντεταγμένες του μέσου M.

Είναι: $a(t) = \dfrac{x(t)}{2}$, $\quad b(t) = \dfrac{y(t)}{2}$

$$a'(t_0) = \frac{x'(t_0)}{2} = \ldots$$

(v) ονομάζω το μήκος του $\vec{OM}$ $d(t)$.

$$d(t) = \sqrt{(a(t)-0)^2 + (b(t)-0)^2} = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)}$$

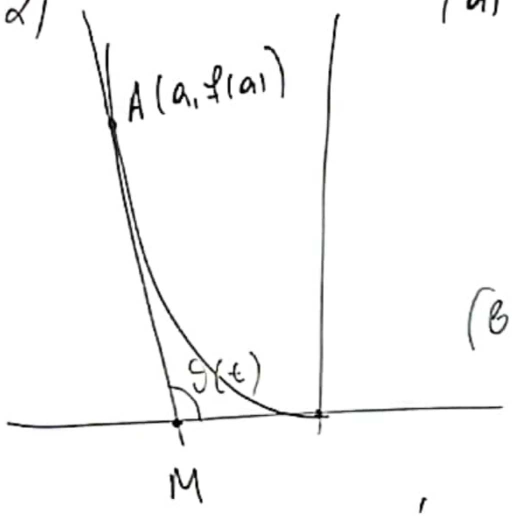
$$d'(t) = \frac{2a(t_0)\cdot a'(t_0) + 2b(t_0)\cdot b'(t_0)}{2\sqrt{a^2(t_0) + b^2(t_0)}} = \ldots$$

<u>2ος τρόπος:</u> Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το μισό της υποτείνουσας

$$d(t) = \frac{(AB)}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \implies d'(t) = 0\,!!!$$

(6) $f(x)=x^2, \quad x \le 0$

α)



(α) Η εξίσωση εφαπτομένης είναι $\varepsilon: y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a) \Leftrightarrow$

$y - a^2 = 2a\cdot(x-a)$. Τέμνει τον $x'x$ για $y=0$

$-a^2 = 2a(x-a) \Leftrightarrow -\frac{a}{2} = x-a \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$. $M\left(\frac{a}{2}, 0\right)$

(β) $a'(t) = -2a(t)$. $M(x(t), 0)$. Ζητάω $x'(t_0)$, $a(t_0) = -2$

Είναι $x(t) = \frac{a(t)}{2} \Rightarrow x'(t_0) = \frac{a'(t_0)}{2} = \frac{-\cancel{2}a(t_0)}{\cancel{2}} = -(-2) = 2$

(γ) $\varepsilon\varphi\theta = f'(a) = 2a. \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta(t) = 2a(t) \Rightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)}\cdot\theta'(t_0) = 2a'(t_0) = 2\cdot(-2a(t_0))$

$= -4(-2) = 8$

$\frac{\eta\mu^2\varphi}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi} \Leftrightarrow$

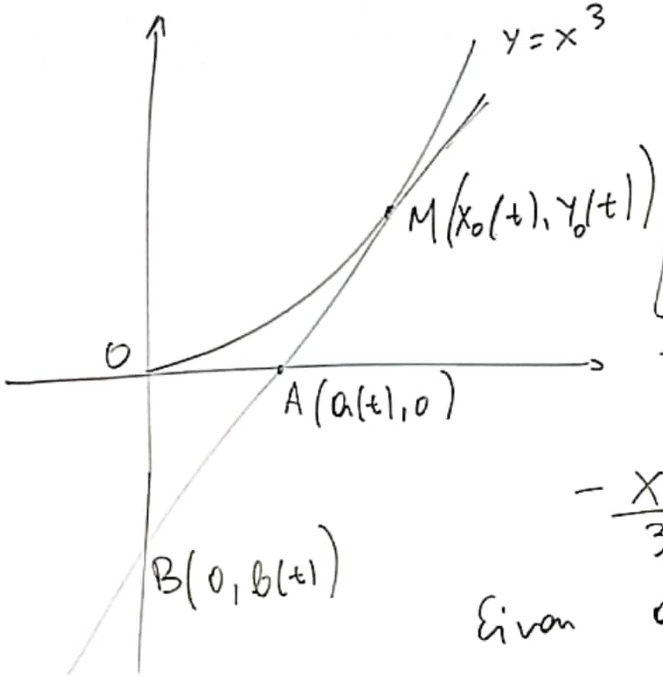
$\varepsilon\varphi^2\theta + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}$

$\left(\varepsilon\varphi^2\theta(t_0) + 1\right)\cdot\theta'(t_0) = 8 \Leftrightarrow$

$\theta'(t_0) = \frac{8}{\varepsilon\varphi^2\theta(t_0) + 1} = \frac{8}{16+1} = \frac{8}{17}$ rad/sec

$- \varepsilon\varphi\theta(t_0) = f'(a(t_0)) = 2a(t_0) = 2\cdot(-2) = -4$

5 $\quad f(x)=x^3,\ x>0$ | έχω $x_0'(t)=3$ m/s



(α) Η εξίσωση εφαπτομένης στο $M(x_0, y_0)$ είναι

$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0) \Leftrightarrow$

$\boxed{\varepsilon:\ y-x_0^3=3x_0^2\cdot(x-x_0)}$

Τέμνει τον x'x για $y=0 \Rightarrow -x_0^3=3x_0^2(x-x_0) \Leftrightarrow$

$-\frac{x_0}{3}=x-x_0 \Leftrightarrow x=\frac{2x_0}{3}$. Άρα $a(t)=\frac{2x_0(t)}{3}$

Είναι $a'(t)=\frac{2x_0'(t)}{3}=\frac{2\cdot 3}{3}=2$ m/s $\Rightarrow a'(t_0)=2$ m/s

(ε) τέμνει τον y'y για $x=0 \Rightarrow y-x_0^3=3x_0^2(-x_0) \Leftrightarrow y=-3x_0^3+x_0^3=-2x_0^3$

Άρα $b(t)=-2x_0^3(t) \Rightarrow \boxed{b'(t_0)=-6x_0^2(t_0)\cdot x_0'(t_0)}$ (2)

Αφού τη χρ. στιγμή t_0 $(OB)=3(OA) \Rightarrow b(t_0)=-3a(t_0) \Leftrightarrow -2x_0^3(t_0)=-\cancel{3}\frac{2x_0(t_0)}{\cancel{3}} \Leftrightarrow$

$x_0^3(t_0)-x_0(t_0)=0 \Leftrightarrow x_0(t_0)\left(x_0^2(t_0)-1\right)=0 \Rightarrow x_0^2(t_0)=1$

(2) $\Rightarrow b'(t_0)=-6\cdot 3=-18$ m/s | (iii) $E(t)=\frac{|a(t)||b(t)|}{2}=\frac{a(t)\left(-b(t)\right)}{2}$