$f(x) = x^3 + 2x - 3$

α) Ν.δ.ο. $f: 1-1$

β) Αν η $f^{-1}(x)$ είναι παρ/μη να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης στο $x_0 = 0$

α) $f \uparrow \Rightarrow 1-1$

β) Ζητάω $f^{-1}(0)$, $(f^{-1})'(0)$.

$f^{-1}(0) = x \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow$
$x^3 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Άρα $f^{-1}(0) = 1$

$f(f^{-1}(x)) = x \Leftrightarrow$

$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1 \Rightarrow$

$f'(f^{-1}(0)) \cdot (f^{-1})'(0) = 1 \Rightarrow$

$$\boxed{f'(1) \cdot (f^{-1})'(0) = 1 \quad (1)}$$

"ή" $f^{-1}(f(x)) = x$

Τώρα: $f'(x) = 3x^2 + 2$. $f'(1) = 5$

$(1) \Rightarrow (f^{-1})'(0) = \frac{1}{5}$.

Η εξίσωση εφαπτομένης είναι:

$y - f^{-1}(0) = (f^{-1})'(0)(x - 0) \Rightarrow$

$$\boxed{y - 1 = \frac{1}{5} x}$$

Ν.δ.ο. οι συναρτήσεις

$f(x) = \ln x$, $g(x) = -x^2$

έχουν ακριβώς μια κοινή εφαπτομένη.

Αν $A(x_1, \ln x_1)$ το σ. επαφής της C_f τότε η εξίσωση εφαπτομένης είναι

$$\varepsilon_1 : \ y - \ln x_1 = \frac{1}{x_1}(x - x_1) \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{1}{x_1} \cdot x - 1 + \ln x_1$$

Αν $B(x_2, -x_2^2)$ το σ. επαφής της C_g τότε η εξίσωση εφαπτομένης είναι

$$\varepsilon_2 : \ y + x_2^2 = -2x_2 \cdot (x - x_2) \Leftrightarrow$$

$$y = -2x_2 \cdot x + 2x_2^2 - x_2^2 \Leftrightarrow$$

$$y = -2x_2 \cdot x + x_2^2$$

$\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2 \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{1}{x_1} = -2x_2 \\ \ln x_1 - 1 = x_2^2 \end{cases}\right\} \quad x_2 = -\frac{1}{2x_1} \quad (1)$$

$$\ln x_1 - 1 = \frac{1}{4x_1^2} \Leftrightarrow$$

$$\ln x_1 - \frac{1}{4x_1^2} - 1 = 0$$

Έστω $A(x) = \ln x - \dfrac{1}{4x^2} - 1$ έχει π.ο. το $(0, +\infty)$

$A(1) = -\frac{1}{4} - 1 < 0$

$A(e) = \cancel{\ln e} - \dfrac{1}{4e^2} \cancel{-1} = < 0$

$A(e^2) = 2 - \dfrac{1}{4e^4} - 1 = 1 - \dfrac{1}{4e^4} > 0$

Από Θ. Bolzano $\Rightarrow \exists\, x_1 \in (1, e^2) : A(x_1) = 0$

$A(x) \uparrow$ στο $(0, +\infty) \Rightarrow x_1$ μοναδικό

$\Rightarrow$ από (1) x_2 μοναδικό $\Rightarrow$ μοναδική κοινή εφαπτομένη.

1) Ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους είναι η παράγωγός του

2) Στη Φυσική $v(t)=x'(t)$, $a(t)=v'(t)$

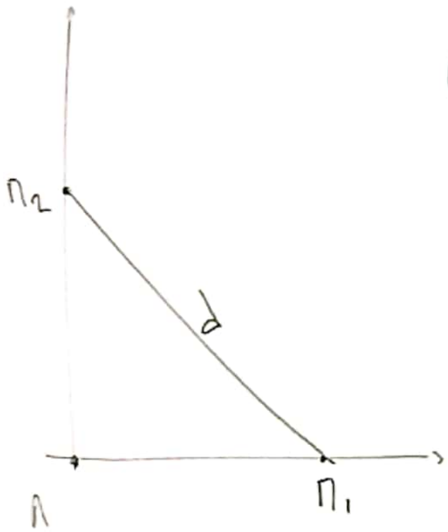
3) Στη Γεωμετρία ο συντελ. διεύθυνσης της εφαπτομένης $\lambda = f'(x)$.

Ασκ. 4 / Σ.125

α) Έστω $x_1(t)$ η απομάκρυνση του $Π_1$ από το Λ, $x_1(t)=15t$

$$\left.\begin{array}{l} x_1'(t)=15 \Rightarrow x_1(t)=15t+c_1 \\ x_1(0)=0 \Rightarrow 15\cdot 0+c_1=0 \Rightarrow c_1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1(t)=15t$$

2ος τρόπος



Έστω $x_2(t)$ η απομάκρυνση του $Π_2$ από Λ. $x_2(t)=20t$

β) $d(t)=\sqrt{x_1^2(t)+x_2^2(t)}=\sqrt{15^2t^2+20^2t^2}=\sqrt{625t^2}=25t$

$d'(t)=25$ km/h

$v_1=15$ km/h

$v_2=20$ km/h

Παραλλαγή του προβλήματος: Το 2ο πλοίο ξεκινάει 2h μετά το 1ο.

Ορίζω ως χρονική στιγμή 0 τη στιγμή που ξεκινάει το 1ο πλοίο.

$x_2'(t)=20 \Leftrightarrow x_2(t)=20t+c_2$. Ξέρω $x_2(2)=0 \Rightarrow 20\cdot 2+c_2=0 \Leftrightarrow \boxed{c_2=-40}$

$$x_2(t)=\left\{\begin{array}{ll} 0, & αν\ t\in[0,2] \\ 20t-40, & αν\ t\in(2,+\infty) \end{array}\right. \qquad d(t)=\{$$