$$f(x)=\begin{cases} e^{-x+1}-x-2, & x\le 1 \\ \ln x + x - 3, & x>1 \end{cases}$$

α) Ν.δ.ο. f συνεχής και βρείτε το $f(A)$

β) Ν.δ.ο. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες

γ) Ν.δ.ο. η >> $\dfrac{f(\alpha)+2}{x-1}+\dfrac{f(\beta)+2}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον 1 ρίζα στο $(1,2)$ $\forall\, \alpha,\beta\in\mathbb{R}-\{1\}$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(2^x)+f(3^x)=f(e^x)+f(\pi^x)$

ε) Αν $\kappa\le 1\le\lambda$ και $e^{-\kappa+1}+\lambda-1=\kappa-\ln\lambda$, βρείτε κ,λ.

α) Για $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

f συνεχής ως πράξεις συνεχών.

Εξετάζω τη συνέχεια στο $x_0=1$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(e^{-x+1}-x-2\right)=1-1-2=-2$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\ln x+x-3\right)=-2$$

$f(1)=e^{-1+1}-1-2=-2$. Άρα f συν. στο 1

Τελικά f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Για $x_1,x_2\in(-\infty,1]$ με $x_1<x_2 \Rightarrow$

$-x_1>-x_2 \Rightarrow -x_1+1>-x_2+1 \overset{e^x \uparrow}{\Longleftrightarrow}$

$e^{-x_1+1}>e^{-x_2+1}$
$-x_1>-x_2$
$\Rightarrow e^{-x_1+1}-x_1>e^{-x_2+1}-x_2$
$f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f\downarrow /(-\infty,1]$

Για $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ με $x_1<x_2 \overset{\ln x\uparrow}{\Longrightarrow}$ $\ln x_1<\ln x_2$, $x_1<x_2$

$\ln x_1+x_1-3<\ln x_2+x_2-3 \Rightarrow$

$f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\uparrow$ στο $(1,+\infty)$

	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$A=\mathbb{R}=\underbrace{(-\infty,1]}_{A_1}\cup\underbrace{(1,+\infty)}_{A_2}$

f συνεχής και $\downarrow$ στο $A_1 \Rightarrow f(A_1)=\left[f(1),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=[-2,+\infty)$

$f(1)=-2$, $\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x+1}-x-2\right)=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}e^{-x+1}\overset{u=-x+1}{=\!=}\lim_{u\to+\infty}e^u=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty}(-x-2)=+\infty$

f συνεχής και $\uparrow$ στο $A_2 \Rightarrow f(A_2)=\left(\lim_{x\to1^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-2,+\infty)$

$f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=[-2,+\infty)\cup(-2,+\infty)=[-2,+\infty)$

(β) $0\in f(A_1)\Rightarrow \exists\, x_1\in A_1: f(x_1)=0$ μοναδικό ($f\downarrow$)

$0\in f(A_2)\Rightarrow \exists\, x_2\in A_2: f(x_2)=0$ >> ($f\uparrow$)

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x+1}-x-2, & x\le 1 \\ \ln x + x - 3, & x>1 \end{cases}$$

α) Ν.δ.ο. f συνεχής και βρείτε το $f(A)$

β) Ν.δ.ο. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες

γ) Ν.δ.ο. η $\Rightarrow$ $\dfrac{f(a)+2}{x-1}+\dfrac{f(b)+2}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον 1 ρίζα στο $(1,2)$ $\forall\, a,b\in\mathbb{R}-\{1\}$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(2^x)+f(3^x)=f(e^x)+f(\pi^x)$

ε) Αν $k\le 1\le \lambda$ και $e^{-k+1}+\lambda-1=k-\ln\lambda$, βρείτε k,λ.

(γ) $\dfrac{f(a)+2}{x-1}+\dfrac{f(b)+2}{x-2}=0$ (1)

(1) για $x\neq 1$, $x\neq 2$ είναι ισοδύναμη με:

$$\underbrace{(x-2)\cdot\big(f(a)+2\big)+(x-1)\big(f(b)+2\big)}_{A(x)}=0$$

$A(x)$ συνεχής στο $[1,2]$ (πράξεις συνεχών)

$A(1)=-1\cdot\big(f(a)+2\big)$

$A(2)=1\cdot\big(f(b)+2\big)$

$A(1)\cdot A(2)<0$.

Αφού $f(A)=[-2,+\infty)$,

και αφού $f(x)=-2$ αληθεύει μόνο για $x=1$

και αφού $a,b\neq 1 \Rightarrow$ $f(a)+2>0$, $f(b)+2>0$

Από Θ. Bolzano $\Rightarrow \exists\, x_1\in(1,2):\ A(x_1)=0$

αφού $x_1\neq 1$, $x_1\neq 2 \Rightarrow x_1$ ρίζα της (1)

(δ) Προφανής $x=0$.

Σχέδιο: $2^x<e^x \Rightarrow f(2^x)<f(e^x)$

$3^x<\pi^x \Rightarrow f(3^x)<f(\pi^x)$

Λύση: Για $x>0$ είναι $1<2^x<e^x \xrightarrow{f\uparrow} f(2^x)<f(e^x)$

$1<3^x<\pi^x \xrightarrow{f\uparrow} f(3^x)<f(\pi^x)$

Για $x<0$ $0<2^x<e^x<1 \xrightarrow{f\downarrow} f(2^x)>f(e^x)$

$f(3^x)>f(\pi^x)$

Μοναδική λύση $x=0$

Scanned with CamScanner