$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ↑ και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $f(1) = 1$.

Έστω $g(x) = f^3(x) + (f \circ f)(x)$ (1) $x \in \mathbb{R}$.

α) f, g αντιστρέψιμες

β) Ν.δ.ο. $(g \circ f^{-1})(x) = x^3 + f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

γ) Να λυθεί η εξίσωση: $x^3 + f(x) = 2$

δ) Αν f συνεχής και $f(a) + f(2a) = 3a$, για κάποιο $a > 0$, ν.δ.ο. η εξίσωση $\dfrac{f(x) - a}{x - 2a} = \dfrac{f(x) - 2a}{x - a}$ έχει μια τουλάχ. ρίζα στο $(a, 2a)$

α) Αφού f ↑ $\Rightarrow$ 1-1 $\Rightarrow$ αντιστρέφεται.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \xrightarrow{f \uparrow} f(x_1) < f(x_2)$

$\Rightarrow \boxed{f^3(x_1) < f^3(x_2) \quad (2)}$

Αφού $f(x_1) < f(x_2) \xrightarrow{f \uparrow} \boxed{f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \; (3)}$

$(2)+(3) \Rightarrow f^3(x_1) + f(f(x_1)) < f^3(x_2) + f(f(x_2)) \Leftrightarrow$

$g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow g$ ↑ στο $\mathbb{R} \Rightarrow g$: 1-1

β) Στην (1) θέτω όπου x το $f^{-1}(x)$

$g(f^{-1}(x)) = f^3(f^{-1}(x)) + (f \circ f)(f^{-1}(x))$ (4)

Αφού $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \Rightarrow D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

πρέπει $x \in D_{f^{-1}}$ ισχύει $f^{-1}(x) \in D_g$ και $f^{-1}(x) \in D_f$

Άρα η (4) ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$. (4) $\Rightarrow \boxed{g(f^{-1}(x)) = x^3 + f(x), \; \forall x \in \mathbb{R}}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ↑ και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $f(1) = 1$.

Έστω $g(x) = f^3(x) + (f \circ f)(x)$ (1) $x \in \mathbb{R}$.

α) f, g αντιστρέψιμες

β) Ν.δ.ο. $(g \circ f^{-1})(x) = x^3 + f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

γ) Να λυθεί η εξίσωση:

$x^3 + f(x) = 2$

δ) Αν f συνεχής και $f(a) + f(2a) = 3a$, για κάποιο $a > 0$, ν.δ.ο. η εξίσωση

$\boxed{\dfrac{f(x) - a}{x - 2a} = \dfrac{f(x) - 2a}{x - a} \text{ (5) έχει μια τουλάχ. ρίζα στο } (a, 2a)}$

Από $f(a) + f(2a) = 3a \iff$

$f(2a) - a = -f(a) + 2a$

γ) $x^3 + f(x) = 2$ (4)

Παρατηρώ για $x = 1$: $1^3 + f(1) = 1 + 1 = 2$.

Άρα η (4) έχει λύση $x_0 = 1$.

Θεωρώ $A(x) = x^3 + f(x)$ .... ↑

(δ) Η (5) για $x \neq a$, $x \neq 2a$ είναι ισοδύναμη με

$$\underbrace{(x-a)(f(x)-a) - (x-2a)(f(x)-2a)}_{B(x)} = 0$$

$B(x)$ συνεχής στο $[a, 2a]$

$B(a) = -(a-2a)(f(a)-2a) = a(f(a)-2a)$

$B(2a) = a(f(2a)-a) = -a(f(a)-2a)$

$B(a) \cdot B(2a) = -a^2 (f(a)-2a)^2 \leq 0$ → Αν $f(a) = 2a$, από τη σχέση $f(a) + f(2a) = 3a \iff f(2a) = a$. $a > 0 \Rightarrow a < 2a \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(a) < f(2a) \iff 2a < a$ άτοπο

Scanned with CamScanner