(12) $f(0)=0$ $\qquad f(x)+f(2x)+f(3x)+f(4x) \geq 10x \quad (1)$

Για $x>0$ $\qquad \dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{f(2x)}{x}+\dfrac{f(3x)}{x}+\dfrac{f(4x)}{x} \geq 10 \quad (2) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\Big(\qquad \Big) \geq 10$

Αφού f παρ/μη στο $0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=l$. $\quad \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(2x)}{x}=2\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(2x)}{2x}=2\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{f(u)}{u}=2l$

Ομοίως $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(3x)}{x}=3l$, $\quad \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(4x)}{x}=4l$

$(2) \Rightarrow l+2l+3l+4l \geq 10 \Leftrightarrow 10l \geq 10 \Leftrightarrow l \geq 1 \quad (4)$

Για $x<0$ $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{f(2x)}{x}+\dfrac{f(3x)}{x}+\dfrac{f(4x)}{x} \leq 10 \quad (3)$

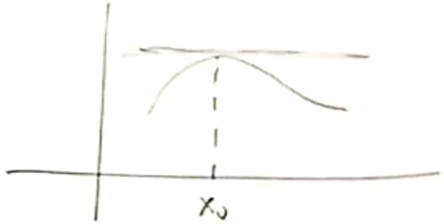
Ομοίως $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}=l \ \ldots \ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(4x)}{x}=4l$ και τελικά $\quad l+2l+3l+4l \leq 10 \Leftrightarrow l \leq 1 \ (5)$

Από $(4),(5) \Rightarrow f'(0)=1$

(18) $f(1)=f(2)=0$, $f'(1)>0$, $f'(2)>0$

i) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} > 0$. Από θεώρημα (όριο + διάταξη) $\Rightarrow$ $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} > 0$ κοντά στο 1^+

αφού $x>1 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow f(x)>0$ κοντά στο 1^+



ii) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} > 0 \Rightarrow \dots\ f(x)<0$

(19) $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής $f'(\alpha)>0$, $f'(\beta)<0$, θέση τοπ. μεγίστου σε $x_0\in(\alpha,\beta)$.

$\lim\limits_{x\to \alpha^+} \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} > 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} > 0$ κοντά στο α^+ $\Rightarrow f(x)>f(\alpha)$ κοντά στο α^+

Ομοίως $\lim\limits_{x\to \beta^-} \dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} < 0 \Rightarrow f(x)>f(\beta)$ κοντά στο β^-

Αφού f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, από ΘΜΕΤ παρουσιάζει μέγιστο στο $[\alpha,\beta]$. Αφού $\exists x\in(\alpha,\beta)$: $f(x)>f(\alpha)$, $f(x)>f(\beta) \Rightarrow$ η f δεν παρουσιάζει μέγιστο στα α, β.

Άρα το παρουσιάζει σε κάποιο $x_0\in(\alpha,\beta)$.

(30) $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παρ/μη. $f\nearrow$

Έστω τυχαίο $x_0\in(\alpha,\beta)$. Θεωρώ $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A(x)$

Για $x>x_0 \to x-x_0>0$, $\xrightarrow{f\nearrow} f(x)>f(x_0)$ $\Big\} \to A(x)>0$ για $x>x_0$

Για $x<x_0 \to x-x_0<0$, $f(x)<f(x_0)$ $\Big\} \to A(x)>0$ για $x<x_0$

$\Big\}\ \lim_{x\to x_0}A(x)\geq 0 \Rightarrow f'(x_0)\geq 0$

ασκ. 29 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$ (1) $\forall x,y\in\mathbb{R}$. $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=4$

i) $x=y=0 \Rightarrow f(0)=f(0)+f(0) \Rightarrow f(0)=0$

ii) $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\overset{(i)}{=}4 \to f'(0)=4$

iii) Έστω τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}$. Θεωρώ $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(1)}{=}\lim_{h\to 0}\dfrac{\cancel{f(x_0)}+f(h)+2x_0h-\cancel{f(x_0)}}{h}=$

$=\lim_{h\to 0}\left(\dfrac{f(h)}{h}+2x_0\right)=4+2x_0$. Άρα $\boxed{f'(x_0)=4+2x_0}$