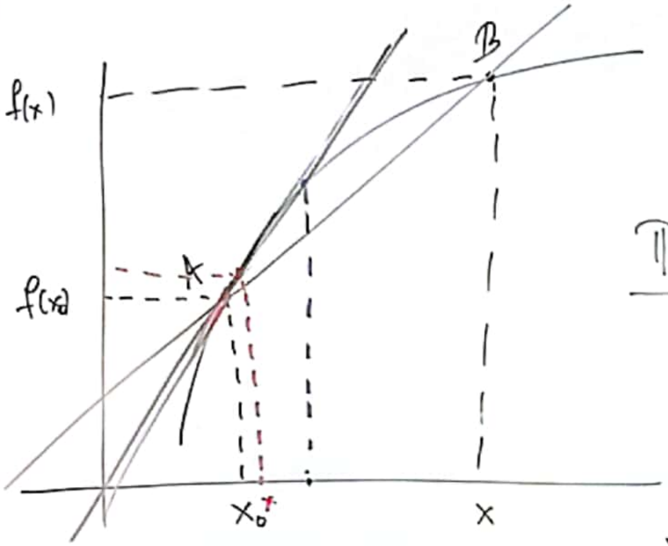


$$\boxed{\lambda_{AB} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \qquad \boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lambda}$$

Πρόβλημα: $f(x)=x^2$. Να βρεθεί η εφαπτομένη στο

$A(2, f(2)) = (2,4)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}\cdot(x+2)}{\cancel{x-2}} = 4$$

Ξέρω $A(2,4)$, $\lambda = 4$. $\quad y-4 = 4\cdot(x-2) \Leftrightarrow y-4 = 4x-8$

$$\boxed{y = 4x-4}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$$

Γενική εξίσωση εφαπτομένης στο $A(x_0, f(x_0))$

$$y - f(x_0) = \lambda\cdot(x-x_0) \Leftrightarrow y-f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

Άσκ. 2 / Σ. 109 / Α΄ ομ.

γ(ii) $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1, & x<0 \\ x+1, & x\geq 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{x}\cdot(x+1)}{\cancel{x}} = 1 \\ &\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{f'(0)=1}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0,1)$ είναι $y-1 = 1\cdot(x-0) \Leftrightarrow \boxed{y = x+1}$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

θέτω $x-x_0=h \Rightarrow x=x_0+h$

όταν $x\to x_0 \Rightarrow h\to 0$

άσκ. 2 / Β' ΟΜ / Σ. 102

$f(1+h)=2+3h+3h^2+h^3$. i) $f(1)=;$

Για $h=0 \Rightarrow f(1)=2$.

ii) $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{2}+3h+3h^2+h^3-\cancel{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(3+3h+h^2)}{\cancel{h}}=3$

Άρα $f'(1)=3$.

iii) $f'(2)=;$ $\quad f(2)\overset{h=1}{=}2+3+3+1=9$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2+3\cdot(h+1)+3(h+1)^2+(h+1)^3-9}{h}=\dots$$

ασκ.5 - Β΄ ομ / Σ.102

$x+1 \le f(x) \le x^2+x+1$ (1) $\forall x \in \mathbb{R}$. $f'(0)=;$

(1) $\xrightarrow{x=0}$ $1 \le f(0) \le 1 \Leftrightarrow f(0)=1$. Σκέψη: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

(1) $\Rightarrow$ $\boxed{x \le f(x)-1 \le x^2+x \quad (2)}$

1η περ. Αν $x>0 \xrightarrow{(2)} 1 \le \frac{f(x)-1}{x} \le \frac{\cancel{x}\cdot(x+1)}{\cancel{x}}$ Από κριτ. παρεμβ. $\Rightarrow$ $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x}=1$

$\lim_{x\to 0^+} 1 = 1$, $\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1$

2η περ. Αν $x<0 \xrightarrow{(2)} 1 \ge \frac{f(x)-1}{x} \ge x+1$. Ομοίως $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-1}{x}=1$

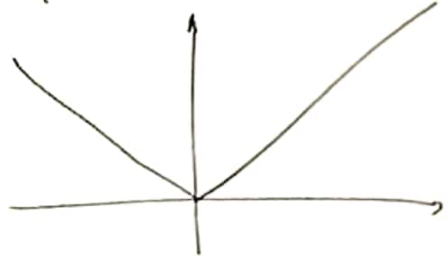
Άρα $f'(0)=1$

Θεώρημα: Αν f παρ/μη στο x_0 $\to$ f συνεχής στο x_0.

Απόδειξη: Αφού f παρ/μη $\Rightarrow$ $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell\in\mathbb{R}$

Ονομάζω $A(x)\overset{x\ne x_0}{=}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Leftrightarrow f(x)-f(x_0)=(x-x_0)\cdot A(x) \Rightarrow f(x)=(x-x_0)A(x)+f(x_0)$.

$\lim_{x\to x_0}\left[(x-x_0)\cdot A(x)+f(x_0)\right] = 0\cdot\ell+f(x_0)=f(x_0)$. Άρα $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0) \Rightarrow$ f συνεχής στο x_0



$f(x)=|x|$ συνεχής στο $x_0=0$. $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$

$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$