f συνεχής στο $[a,b]$, $\quad x_0 \in (a,b)$

$f \nearrow$ στο $[a, x_0)$,

$f \nearrow$ στο $[x_0, b]$

Ν.δ.ο. $f \uparrow$ στο $[a,b]$

$a \leq x_1 < x_2 < x_0$

$x_0 \leq x_1 < x_2 < b$

$x_1 < x_0 < x_2$

$$\boxed{x_1 < x_0 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_0)}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$f\big([a, x_0)\big) = \big[f(a), f(x_0)\big)$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

$$f(x_1) \in \big[f(a), f(x_0)\big)$$

$$f(x_1) < f(x_0)$$

Scanned with CamScanner

$\boxed{234}$ $f(0)=1$, $\quad f^2(x) - x\cdot f(x) = x+1 \quad (1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

i) $f^2(-2) + 2f(-2) = -1 \Leftrightarrow f^2(-2) + 2f(-2) + 1 = 0 \Leftrightarrow (f(-2)+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(-2) = -1}$

ii) f συνεχής στο $[-2,0]$ $\Rightarrow$ Από ΘΕΤ $\Rightarrow \exists x_0 \in (-2,0): f(x_0) = 0$.

$f(0) \neq f(-2)$

$0 \in (f(-2), f(0))$

$\xrightarrow[x=x_0]{(1)} \cancel{f^2(x_0)} - x_0 \cdot \cancel{f(x_0)} = x_0 + 1 \Leftrightarrow x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1$

(iii) f συνεχής στα $(-\infty, -1)$, $(-1, +\infty)$ και δεν μηδενίζεται σε αυτά.

Από σχόλιο Bolzano $\Rightarrow$ διατηρεί πρόσημο. $f(0) = 1 > 0$, $f(-2) = -1 < 0$

x		-1	
$f(x)$	$-$	0	$+$

$\boxed{235}$ $\underline{f(0)=1}$, $f^2(x) = x^2\cdot f(x) + x^2 + a \quad (1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(i) $f^2(0) = a \Rightarrow a = 1$.

(ii) Έστω x_0 ρίζα $\Rightarrow f(x_0) = 0 \xrightarrow{(1)} \cancel{f^2(x_0)} = x_0^2 \cdot \cancel{f(x_0)} + x_0^2 + 1 \Leftrightarrow x_0^2 = -1$ άτοπο.

(iii) $\left.\begin{array}{l} f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ f \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \end{array}\right\}$ Από σχόλιο Bolzano $\Rightarrow$ διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Αφού $f(0) = 1 > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(iv) $f^2(x) = x^2 f(x) + x^2 + 1 \Leftrightarrow$

$f^2(x) - x^2 f(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow$

$f^2(x) - 2\cdot\frac{1}{2}x^2 f(x) + \frac{1}{4}x^4 = \frac{1}{4}x^4 + x^2 + 1 \Leftrightarrow$

$\Big(\underbrace{f(x) - \frac{1}{2}x^2}_{A(x)}\Big)^2 = \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)^2 \quad (2)$

$\left.\begin{array}{l} \text{Η } A(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ A(x) \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \end{array}\right\} \rightarrow$ από σχ. Bolz $\Rightarrow$ διατηρεί πρόσημο

$A(0) = f(0) - \frac{1}{2}\cdot 0^2 = 1 > 0$

$\Rightarrow A(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$(2) \Rightarrow \left| f(x) - \frac{1}{2}x^2 \right| = \frac{1}{2}x^2 + 1 \overset{A(x)>0}{\Leftrightarrow}$

$f(x) - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^2 + 1 \Leftrightarrow$

$f(x) = x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}$.