

$$\boxed{1} \quad f(f(x)) = x^9 \quad (1) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

i) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τέλ $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$

$$x_1^9 = x_2^9 \stackrel{x^{9 \cdot \frac{1}{9}}}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2. \text{ Άρα } f: 1-1$$

ii) Αν $f(2) = 8$

$$\boxed{f(x_0) = 2}$$

$$x_0 = \sqrt[3]{2}$$

Έστω οποιοσδήποτε $y \in \mathbb{R}$ θ.δ.θ. $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ τέλ $f(x_0) = y$

(1) $\underline{x = \sqrt[9]{y}}$, $f(f(\sqrt[9]{y})) = y$. Άρα ως συνάρτηση $x_0 = f(\sqrt[9]{y})$. Άρα $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Άρα $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $2 \in \mathbb{R} \rightarrow \exists x_1: f(x_1) = 2$. Άρα $f: 1-1 \rightarrow x_1$ μοναδικό.

Άρα $f(x_1) = 2 \Rightarrow f(f(x_1)) = f(2) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x_1^9 = 8 \Leftrightarrow x_1^3 = 2 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = \sqrt[3]{2}}$

iii) Άρα $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \Rightarrow$ η εξίσωση $f(x) = a$ έχει λύση ως προς x . Μοναδική