ασκ. 10 / Επανάληψης

$$3f^3(x) + 4f(x) = x - 1 \quad (1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Έστω τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$. Θ.δ.ο. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x) - f(x_0)\big) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 3f^3(x) + 4f(x) = x - 1 \\ 3f^3(x_0) + 4f(x_0) = x_0 - 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} 3\big(f^3(x) - f^3(x_0)\big) + 4\big(f(x) - f(x_0)\big) = x - x_0 \Leftrightarrow$$

$$3\cdot\big(f(x) - f(x_0)\big)\cdot\big(f^2(x) + f(x)\cdot f(x_0) + f^2(x_0)\big) + 4\big(f(x) - f(x_0)\big) = x - x_0$$

$$\big(f(x) - f(x_0)\big)\cdot\Big[3\big(\underbrace{f^2(x) + f(x)\cdot f(x_0) + f^2(x_0)}_{A(x)}\big) + 4\Big] = x - x_0 \quad (2)$$

Γνωρίζω $A(x) \geq 0 \Rightarrow 3A(x) + 4 \geq 4 \Rightarrow 3A(x) + 4 \neq 0$

$$(2) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = \frac{|x - x_0|}{|3A(x) + 4|} = \frac{|x - x_0|}{3A(x) + 4} \leq \frac{|x - x_0|}{4}$$

Άρα $-\dfrac{|x - x_0|}{4} \leq f(x) - f(x_0) \leq \dfrac{|x - x_0|}{4}$ Από κριτήριο παρεμβολής $\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x) - f(x_0)\big) = 0$ ο.ε.δ.

$$0$$

δ) $\lim_{x\to 1} \dfrac{|f(x)-2|-2}{|1-f^3(x)|-1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{\cancel{2}-f(x)-\cancel{2}}{\cancel{1}-f^3(x)-\cancel{1}} = \lim_{x\to 1} \dfrac{1}{f^2(x)} = +\infty$

$\lim_{x\to 1}(f(x)-2) = -2 < 0 \Rightarrow f(x)-2<0$ κοντά στο 1

$\lim_{x\to 1}(1-f^3(x)) = 1 > 0 \rightarrow 1-f^3(x) > 0$ » »

$3f^3(x)+4f(x) = x-1$

$3f^3(1)+4f(1) = 0 \Leftrightarrow$

$f(1)\cdot(3f^2(1)+4) = 0 \Leftrightarrow$

$f(1)=0$ ή $3f^2(1)+4=0$

αδύν.

$$\lim(f(x)+g(x)) = \lim f(x) + \lim g(x)$$

$\left.\begin{array}{l} f+g \text{ συνεχής στο } x_0 \\ g \quad \text{» στο } x_0 \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} f$ συνεχής στο x_0

$(f+g)-g = f$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} -\dfrac{|x|}{x}, & x\neq 0 \\ -1, & x=0 \end{cases}$$

$f(x)+g(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + k$, $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lambda \in \mathbb{R}$

α) Από λήμμα $\Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 0 \Leftrightarrow \cancel{1} - \cancel{1} + 2 - 3 + k = 0 \Leftrightarrow k = 1$

ii) $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1}{x-1} =$

1	−1	2	−3	1	1
↓	1	0	2	−1	
1	0	2	−1	$\boxed{0}$	

$\lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)} \cdot (x^3 + 2x - 1)}{\cancel{x-1}} = 2$

(iii) $f(x) = (x-1) \cdot \underbrace{(x^3 + 2x - 1)}_{A(x)}$

♡ $\left.\begin{matrix} A(0) = -1 < 0 \\ A(1) = 2 > 0 \end{matrix}\right\}$ από Θ. Bolzano $\Rightarrow$ $\exists x_0 \in (0,1) : A(x_0) = 0$

♡ $A(x)$ συνεχής στο $[0,1]$ $\Rightarrow f(x_0) = 0$

$A(x) \uparrow \Rightarrow$ ρίζα μοναδική στο $(0,1)$

(iv) $\lim_{x \to 1} \frac{1}{f(x) \cdot \ln x} =$

$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{(x-1)\ln x} \cdot \frac{1}{x^3 + 2x - 1} \right) = +\infty$

$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x^3 + 2x - 1} = \frac{1}{2} > 0$

Για $x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$, $\ln x > 0$

Για $0 < x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0$, $\ln x < 0$

$\left.\right\}$ $(x-1)\ln x > 0 \quad \forall x \neq 1$

$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)\ln x} = +\infty$

$\boxed{212}$ $\exists\, x_0 : \quad x_0^2 + f(1)\cdot x_0 + f(1)\cdot f(2) = 0 \quad (1)$

Η εξίσωση $x^2 + f(1)\cdot x + f(1)\cdot f(2) = 0$ έχει λύση

Άρα $\Delta \geq 0 \ \ldots$

ii) $A(x) = 2x f(x) - f(1)$

$$\left.\begin{aligned} A(0) &= -f(1) \\ A(1) &= 2f(1) - f(1) = f(1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow A(0)\cdot A(1) = -f^2(1) \leq 0$$

$\boxed{213}$ $0 < f(x) < 1 \ (1) \ \forall x \in \mathbb{R}$. Έστω $A(x) = f^2(x) - f(x) + x$

$$\left.\begin{aligned} A(0) &= f^2(0) - f(0) = \underset{+}{f(0)}\cdot\big(\underset{-}{f(0) - 1}\big) < 0 \\ A(1) &= \underbrace{f^2(1)}_{+} \underbrace{- f(1) + 1}_{+} > 0 \end{aligned}\right\} \text{ Bolz. στο } [0,1]$$

$\boxed{224}$

$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy - 1 \quad (1) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \qquad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1 \quad (2)$

i) $(1) \xrightarrow[y=0]{x=0} \cancel{f(0)} = \cancel{f(0)} + f(0) - 1 \Leftrightarrow \boxed{f(0) = 1}$

$(2) \xrightarrow{\text{Λήμμα}} \lim_{x \to 0} \left(f(x) - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1$

$\Rightarrow f$ συνεχής στο 0

ii) Έστω τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$. Θ.δ.ο. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{u \to 0} \left[f(u + x_0) \right] \overset{(1)}{=} \lim_{u \to 0} \left(f(u) + f(x_0) + 2ux_0 - 1 \right) =$

$u = x - x_0 \Rightarrow x = u + x_0$

όταν $x \to x_0 \Rightarrow u \to 0$

$\lim_{u \to 0} f(u) + f(x_0) + \lim_{u \to 0} \left(2ux_0 - 1 \right) = 1 + f(x_0) - 1$

$= f(x_0)$ ο.ε.δ

$x = x_0$

$x - x_0 = 0$

$x = x_0$

$\frac{x}{x_0} = 1$

Άρα f συνεχής στο $x_0 \Rightarrow f$ συνεχής στο $\mathbb{R}$.

iii) $f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{9}. \quad (3)$

$(1) \xrightarrow[y=\frac{2}{3}]{x=\frac{1}{3}} f(1) = \underbrace{f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right)} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} - 1 = \frac{32}{9} + \frac{4}{9} - \frac{9}{9} = \frac{27}{9} = 3$

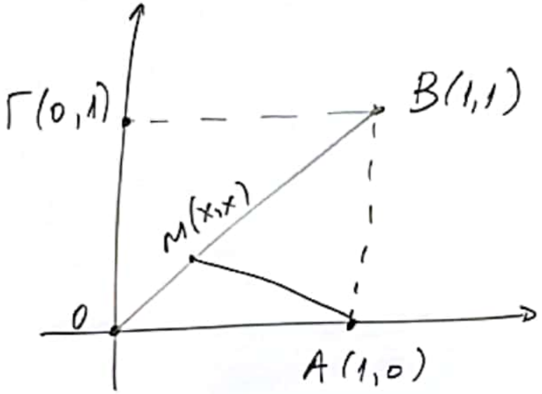
Άρα $f(1) \neq f(0)$

f συνεχής στο $[0,1]$

$2 \in \left(f(0), f(1) \right)$

Από Θ.Ε.Τ. $\Rightarrow \exists x_1 \in (0,1): f(x_1) = 2$ ο.ε.δ

$\boxed{227}$



$(OM)^4 = (AM) + (\Gamma M)$ (1) , $M(x,x)$

(1) $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x^2+x^2}^{\,4} = \sqrt{(1-x)^2+x^2} + \sqrt{x^2+(1-x)^2}$ $\Leftrightarrow$

$(2x^2)^2 = 2\sqrt{(1-x)^2+x^2}$ $\Leftrightarrow$ $\underbrace{4x^4 - 2\sqrt{(1-x)^2+x^2}}_{A(x)} = 0$ (2)

$A(0) = -2 < 0$

$A(1) = 4-2 = 2 > 0$

$A(x)$ συνεχής στο $[0,1]$

Από Θ. Bolzano $\rightarrow$ $\exists$ ρίζα της (2)

άρα $\exists$ σημείο M για την (1). ο.ε.δ.

$\boxed{228}$ $f(0)\cdot f(1) + 4 - 2f(0) - 2f(1) < 0$ $\Leftrightarrow$

$f(0)\cdot\left(f(1)-2\right) - 2\cdot\left(f(1)-2\right) < 0$ $\Leftrightarrow$

$\left(f(1)-2\right)\left(f(0)-2\right) < 0$

Έστω $A(x) = f(x) - 2$

$A(1)\cdot A(0) < 0$

(iii) $g(x_0) = f^2(x_0) - 4f(x_0) + 5$

$= 4 - 4\cdot 2 + 5 = 1$

Άρα $g(x) \geq 1 = g(x_0)$

$\exists$ f, g. f συνεχής στο x_0, g ασυνεχής στο x_0

και f+g συνεχής στο x_0

$f+g - f = g$