ασκ.10 / Επανάληψη

$$3f^3(x)+4f(x)=x-1 \quad (1) \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

(α) Έστω x_1,x_2 με $f(x_1)=f(x_2) \overset{(2)}{\Rightarrow} f^3(x_1)=f^3(x_2) \Rightarrow$

$$3f^3(x_1)=3f^3(x_2)$$

$$(2)\Rightarrow \quad 4f(x_1)=4f(x_2)$$

$$3f^3(x_1)+4f(x_1)=3f^3(x_2)+4f(x_2) \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$x_1-1=x_2-1 \Leftrightarrow x_1=x_2$. Άρα f: 1-1

$$f(x)\cdot\left(3f^2(x)+4\right)=x-1$$

$$f(x)=\frac{x-1}{3f^2(x)+4}\le\frac{x-1}{4}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{4}=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty.$

$(1)\overset{x}{\underset{x+1}{\Rightarrow}} 3f^3(x+1)+4f(x+1)=x \quad (3)$

Ονομάζω $A(x)=3x^3+4x$ περιττή

$(3)\Rightarrow A\left(f(x+1)\right)=x$

$A\left(f(-x+1)\right)=-x=-A\left(f(x+1)\right)=A\left(-f(x+1)\right).$

Άρα $A\left(f(-x+1)\right)=A\left(-f(x+1)\right)\Rightarrow f(-x+1)=-f(x+1)\Rightarrow f(x+1)=-f(-x+1)\overset{x=x-1}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow f(x)=-f(-x+2).$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-f(-x+2)\right]\overset{-x+2=u}{=\!=}\lim_{u\to-\infty}\left(-f(u)\right)=+\infty$$

ασκ.10 / Επανάληψη

$$3f^3(x)+4f(x)=x \quad (1) \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

ξέρω $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. θ.δ.ο. f περιττή.

Θεωρώ $A(x)=3x^3+4x$ περιττή $\quad (1)\Rightarrow A(f(x))=x \quad \forall x\in\mathbb{R} \overset{x=-x}{\Rightarrow}$

$$A(f(-x))=-x=-A(f(x))=A(-f(x))$$

Άρα $A(f(-x))=A(-f(x))\Rightarrow f(-x)=-f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \overset{x=-u}{=} \lim_{u\to-\infty} f(-u) \xrightarrow[\text{περ}]{f} -\lim_{u\to-\infty} f(u)=+\infty.$$

ασκ. 10 / Επανάληψη

$3f^3(x)+4f(x)=x-1$, (1) $x\in\mathbb{R}$. ν.δ.ο. $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Έστω τυχαίο $y\in\mathbb{R}$. θ.δ.ο. $\exists\, x_0\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x_0)=y$

$A(x)=3x^3+4x$

για $x=3y^3+4y+1 \Rightarrow$

$x-1=3y^3+4y$

$x=3y^3+4y+1$

$3f^3(3y^3+4y+1)+4f(3y^3+4y+1)=3y^3+4y$

$A\left(f(3y^3+4y+1)\right)=A(y) \Rightarrow f(3y^3+4y+1)=y$

Άρα το ζητούμενο $x_0=3y^3+4y+1. \Rightarrow y\in f(\mathbb{R})$

Μια ένσταση: Αν f συνεχής και $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ τότε $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$

Αν f συνεχής και $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ και $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.