ασκ. 2 / Σύνολο τιμών.

α) $f(x)=x^3-5x^2+6x-7$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \ (1)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \ (2)$

Έστω τυχαίο $y\in\mathbb{R}$. Θ.δ.ο. $\exists\, x_1\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x_1)=y$

Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \exists\, b$ κοντά στο $+\infty$ ώστε $f(b)>y$

" $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Rightarrow \exists\, a$ " $-\infty$ " $f(a)<y$

$$\left.\begin{array}{l} f(a)<y<f(b) \\ f \text{ συνεχής στο } [a,b] \end{array}\right\}$$

Από Θ.Ε.Τ. $\Rightarrow \exists\, x_1\in(a,b)$ ώστε $f(x_1)=y$

Άρα $y\in f(A) \Rightarrow f(A)=\mathbb{R}$.

4/ Σύνολο τιμών.

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-1} \qquad D_f=\mathbb{R}-\{1\}=\overbrace{(-\infty,1)}^{A_1}\cup\overbrace{(1,+\infty)}^{A_2}$$

Έστω $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$.

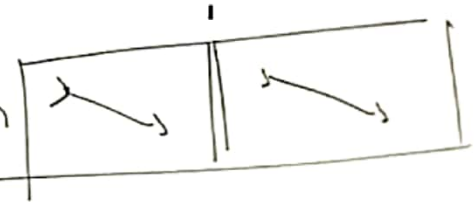
$$\Delta = f(x_2)-f(x_1) = \frac{2x_2+1}{x_2-1} - \frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{(2x_2+1)(x_1-1)-(x_2-1)\cdot(2x_1+1)}{(x_2-1)(x_1-1)} =$$

$$= \frac{2x_1x_2-2x_2+x_1-1-\cancel{2x_1x_2}-x_2+2x_1+1}{\text{-----}} = \frac{-3x_2+3x_1}{\text{----}} = \frac{\overset{-}{-3}\,\overbrace{(x_2-x_1)}^{+}}{\underbrace{(x_2-1)(x_1-1)}_{+}}$$

1η περ. $x_1, x_2 > 1 \rightarrow \Delta < 0 \rightarrow f \downarrow$ στο $(1,+\infty)$

2η περ. $x_1, x_2 < 1 \rightarrow \Delta < 0 \rightarrow f \downarrow$ στο $(-\infty,1)$

f(x)



$f\downarrow$ και συνεχής στο $A_1=(-\infty,1)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x-1} = 2.$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$$

$$f(A_1)=(-\infty,2)$$

$f\downarrow$ και συνεχής στο $A_2=(1,+\infty)$

.... $f(A_2)=(2,+\infty)$.

$$f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(-\infty,2)\cup(2,+\infty).$$

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2x-2+2+1}{x-1}=\frac{2\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}+\frac{3}{x-1}=2+\frac{3}{x-1}$$

$$1<x_1<x_2 \rightarrow 0<x_1-1<x_2-1 \Rightarrow \frac{1}{x_1-1}>\frac{1}{x_2-1} \ \dots\ f(x_1)>f(x_2)$$

ασκ. 8 / Σ τιμών. $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

$$f^2(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4x - \frac{4}{x} + 6 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\cdot\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = \left(x + \frac{1}{x} - 2\right)^2$$

$f^2(x) = \left(x + \frac{1}{x} - 2\right)^2$. Γνωρίζω ότι αν $x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow$

$x^2 + 1 \geq 2x \Leftrightarrow$

$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$

$$|f(x)| = x + \frac{1}{x} - 2 \quad (1)$$

Λύνω την εξίσωση $f(x) = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x + \frac{1}{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

f συνεχής και δεν μηδενίζεται σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$, $(1,+\infty)$

από σχόλιο Bolzano $\Rightarrow$ διατηρεί πρόσημο σε καθένα από αυτά.

	0 … 1	1 … +∞
1η	+	+
2η	−	−
3η	+	−
4η	−	+

1η) $\Rightarrow f(x) = x + \frac{1}{x} - 2 \quad x \in (0, +\infty)$

2η) $\Rightarrow f(x) = -\left(x + \frac{1}{x} - 2\right) \quad x \in (0, +\infty)$

3η) $\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x} - 2, & x \in (0,1) \\ -\left(x + \frac{1}{x} - 2\right), & x \in (1, +\infty) \end{cases}$

4η) $f(x) = \begin{cases} -\left(x + \frac{1}{x} - 2\right), & x \in (0,1) \\ x + \frac{1}{x} - 2, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$