ασκ. 3 / ΘΜΕΤ. Ν.δ.ο. $f(x_0)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)}{3}$ (1)

$f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$

$f(x_0)=\sqrt[3]{f(\alpha)\cdot f(\beta)\cdot f(\gamma)}$

Έστω $\alpha<\beta<\gamma$. f συνεχής στο $[\alpha,\gamma]$

1η περ. f σταθερή στο $[\alpha,\gamma]$ τότε $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)$ τότε $(1)\Leftrightarrow f(x_0)=\dfrac{\cancel{3}f(\alpha)}{\cancel{3}}$

Ένα x_0 που ικανοποιεί την (1) είναι $x_0=\alpha$.

2η περ. f μη σταθερή στο $[\alpha,\gamma]$. Από ΘΜΕΤ. $\Rightarrow m\le f(x)\le M \quad \forall x\in[\alpha,\gamma]$

$$\left.\begin{aligned} m&\le f(\alpha)\le M\\ m&\le f(\beta)\le M\\ m&\le f(\gamma)\le M\end{aligned}\right\} \quad 3m\le f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)\le 3M \Rightarrow$$

$$m\le \frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)}{3}\le M$$

$$f(x_1)\le \underbrace{\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)}{3}}_{A}\le f(x_2).\qquad [f(x_1),f(x_2)]\subseteq f(A)$$

$\Rightarrow \exists\, x_0 : f(x_0)=A.$

ασκ. 4 / ΘΜΕΤ. $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ συνεχής $f(x)<x$ $\forall x>0$

α) Αφού f συνεχής $\Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$

Αφού $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty) \Rightarrow 0\le f(x)<x \quad \forall x\in(0,+\infty)$

$$\lim_{x\to 0} x = 0 = \lim_{x\to 0} 0$$

Από κριτήριο παρεμβολής $\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0 \Rightarrow f(0)=0.$

β) $\forall\ \alpha,\beta>0,\ \alpha<\beta$ ν.δ.ο. $\exists\ M\in(0,1)\ :\ f(x)\le M\cdot x \quad \forall x\in[\alpha,\beta]$

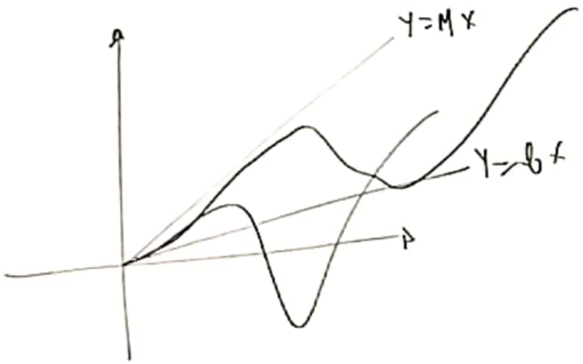
Έστω $B(x)=\frac{f(x)}{x}$. συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Από ΘΜΕΤ. παρουσιάζει μέγιστο έστω M.

Άρα $\frac{f(x)}{x}\le M$

Έχω $f(x)<x \xRightarrow{x>0} \frac{f(x)}{x}<1$

αφού $M=\max$ της $B(x)=\frac{f(x)}{x}$ θα είναι $M<1$

αφού $f(x), x>0 \Rightarrow M>0 \Rightarrow M\in(0,1)$



Από προηγ. ΘΜΕΤ. για την $B(x)$, παρουσιάζει ελάχιστο $\Rightarrow$

$$B(x)\ge b \Rightarrow \frac{f(x)}{x}\ge b \Leftrightarrow f(x)\ge bx$$