ασκ.4 | f συνεχής με $f^3(x) - 3f(x) + 2 = 0$ (1) $\forall x \in \mathbb{R}$

1	0	-3	2	1
↓	1	1	-2	
1	1	-2	$\boxed{0}$	

$(f(x)-1)\cdot(f^2(x)+f(x)-2)=0 \Leftrightarrow$

$(f(x)-1)^2\cdot(f(x)+2)=0.$

Έστω τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$: $(f(x_0)-1)^2\cdot(f(x_0)+2)=0 \Leftrightarrow$

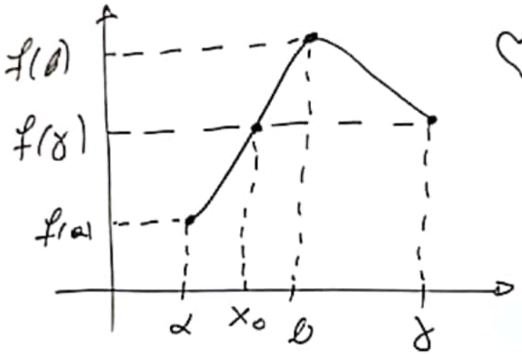
$f(x_0)=1$ ή $f(x_0)=-2$

Δυο συναρτήσεις που ικανοποιούν την (1) είναι $f(x)=1\ \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)=-2\ \forall x \in \mathbb{R}$

Έστω ότι $\exists$ συνάρτηση f με $f(x_1)=1$, $f(x_2)=-2$

από Θ.Ε.Τ. $\Rightarrow$ η f παίρνει όλες τις τιμές του διαστήματος $[-2,1]$, άτοπο.

ασκ.5 $\quad \alpha < \beta < \gamma \qquad f(\alpha) < f(\gamma) < f(\beta)$ όχι αντιστρέψιμη.



♡ Αφού f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ♡ $f(\alpha) < f(\beta)$ και $f(\gamma) \in (f(\alpha), f(\beta))$

από Θ.Ε.Τ. $\Rightarrow \exists\, x_0 \in (\alpha, \beta) : f(x_0) = f(\gamma)$ και $x_0 \neq \gamma$

Άρα f όχι 1-1

ασκ.6 $\quad \lim_{x \to 2} f(x) = 3 \xrightarrow{f \text{ συνεχής}} f(2) = 3$. Αφού f περιττή $\rightarrow f(-2) = -f(2) = -3$

Αφού f συνεχής στο $[-2, 2]$, $\underset{-3}{f(-2)} \neq \underset{3}{f(2)}$. Από Θ.Ε.Τ. η f παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές των $[-3, 3]$

Δηλ. $[-3, 3] \subseteq f(A)$

ασκ.7 $\quad$ Έστω f μη σταθερή στο Δ.

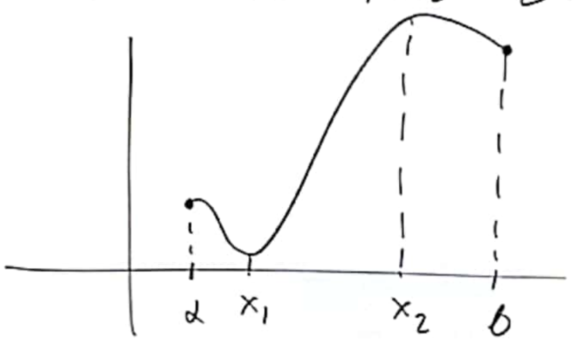
$\exists\, x_1 < x_2$ ώστε $f(x_1) \neq f(x_2)$

αφού f συνεχής στο $[x_1, x_2]$

Από ΘΕΤ $\Rightarrow$ η f παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές των $[f(x_1), f(x_2)]$ που είναι άπειρες, άτοπο.

Θ.Μ.Ε.Τ. Αν f συνεχής σε $[\alpha, \beta]$ τότε παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Δηλαδή $\exists\, x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ ώστε $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$



$m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$

$\exists\, x_1, x_2 \in [\alpha, \beta] \quad f(x_1) = m, \ f(x_2) = M$

$$\boxed{f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)}$$

Σύνολο τιμών.

Αν f συνεχής και $\uparrow$ στο $[\alpha, \beta] \rightarrow f([\alpha, \beta]) = [f(\alpha), f(\beta)]$

» $\uparrow$ στο $(\alpha, \beta) \rightarrow f((\alpha, \beta)) = \left(\lim_{x \to \alpha^+} f(x), \lim_{x \to \beta^-} f(x)\right)$

» $\uparrow$ στο $(\alpha, +\infty) \rightarrow f((\alpha, +\infty)) = \left(\lim_{x \to \alpha^+} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right)$

» $\uparrow$ στο $[\alpha, +\infty) \rightarrow f([\alpha, +\infty)) = \left[f(\alpha), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right)$

» $\uparrow$ στο $(-\infty, \beta] \rightarrow f((-\infty, \beta]) = \left(\lim_{x \to -\infty} f(x), f(\beta)\right]$

» $\downarrow$ στο $[\alpha, \beta] \longrightarrow f([\alpha, \beta]) = [f(\beta), f(\alpha)]$

» $\downarrow$ στο $[\alpha, +\infty) \rightarrow f([\alpha, +\infty)) = \left(\lim_{x \to +\infty} f(x), f(\alpha)\right]$