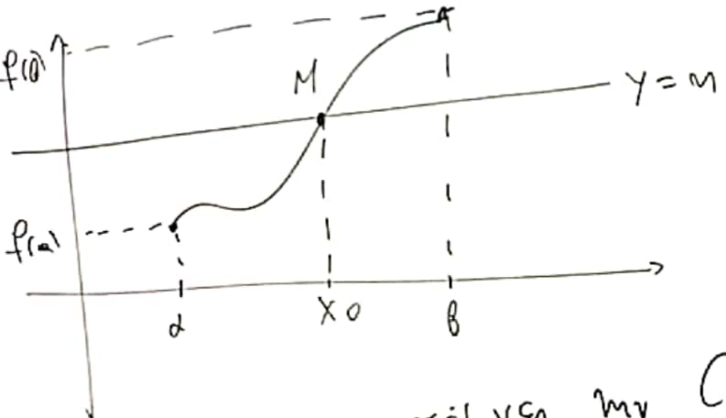
Θ.Ε.Τ.

Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε για κάθε $\eta \in (f(\alpha), f(\beta))$ ή στο $(f(\beta), f(\alpha))$,

$\exists\, \xi \in (\alpha, \beta) : f(\xi) = \eta$



Η ευθεία $y = \eta$ τέμνει την C_f σε σημείο $M(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (\alpha, \beta)$

Απόδειξη: Θεωρώ $A(x) = f(x) - \eta$, έστω $f(\alpha) < f(\beta)$

♡ $A(x)$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ πράξεις συνεχ.

♡ $A(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$
$A(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$

Επειδή $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$

Από Θ. Bolzano $\Rightarrow$ $\exists\, \xi \in (\alpha, \beta) : A(\xi) = 0 \Rightarrow$
$f(\xi) - \eta = 0 \Rightarrow$
$f(\xi) = \eta$

Παρατήρηση: f συνεχής $[\alpha, \beta]$
$f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0 \Rightarrow$

$f(\alpha) < 0$ και $f(\beta) > 0$

$f(\alpha) < 0 < f(\beta) \Rightarrow \exists\, x_0 : f(x_0) = 0$

<u>ασκ. 1</u> $f(a) \neq f(b)$. $\quad f(x_0) = \dfrac{3f(a)+5f(b)}{8}$.

Έστω $f(a) < f(b)$.

<u>Θ.δ.ο.</u>

$$f(a) < \frac{3f(a)+5f(b)}{8} < f(b) \Leftrightarrow$$

$$8f(a) < 3f(a)+5f(b) < 8f(b) \Leftrightarrow$$

$8f(a) < 3f(a)+5f(b)$ και

$8f(a)-3f(a) < 5f(b)$

$5f(a) < 5f(b)$

$f(a) < f(b)$

ισχύει

$3f(a)+5f(b) < 8f(b) \Leftrightarrow$

$3f(a) < 3f(b) \Leftrightarrow$

$f(a) < f(b)$

ισχύει

Άρα ο αριθμός $\eta = \dfrac{3f(a)+5f(b)}{8} \in (f(a), f(b))$

Από Θ.Ε.Τ. $\Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b): f(x_0) = \eta$ ο.ε.δ.

<u>2ος τρόπος:</u>

Θ.δ.ο. η εξίσωση $f(x) = \dfrac{3f(a)+5f(b)}{8} \Leftrightarrow$

έχει λύση στο (a,b)

$8f(x) = 3f(a)+5f(b) \Leftrightarrow$

$\underbrace{8f(x)-3f(a)-5f(b)}_{A(x)} = 0$

♡ $A(x)$ συνεχής στο $[a,b]$

♡ $A(a) = 5f(a)-5f(b) = 5\cdot(f(a)-f(b))$

♡ $A(b) = 3(f(b)-f(a))$

$f:[0,1] \to \mathbb{R}$ ίσχυει $f \uparrow$. $f(x_0) = \frac{1}{5}\left[f(0) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{1}{4}) + f(1)\right] = A$

$f(0) < f(\frac{1}{4}) < f(\frac{1}{3}) < f(\frac{1}{2}) < f(1)$

$f(0) = f(0)$

$f(0) < f(\frac{1}{4})$

$f(0) < f(\frac{1}{3})$

$f(0) < f(\frac{1}{2})$

$f(0) < f(1)$

$5 \cdot f(0) < f(0) + \dots + f(1)$

$f(0) < \frac{f(0) + \dots + f(1)}{5} = A$

$f(0) < f(1)$

$f(\frac{1}{4}) < f(1)$

$f(\frac{1}{3}) < f(1)$

$f(\frac{1}{2}) < f(1)$

$f(1) = f(1)$

$\frac{f(0) + \dots + f(1)}{5} < \frac{5f(1)}{5}$

$A < f(1)$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [0,1] \\ f(0) < A < f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, x_0 \in (0,1) : f(x_0) = A \Rightarrow$ μοναδική.

ομοίως εργαζόμαστε αν $f \downarrow$

Ασκ. 3

f συνεχής στο Δ. $f(x) \in \mathbb{Z}$

Αν f όχι σταθερή $\Rightarrow$

$f(x_1) = a \in \mathbb{Z}$

$f(x_2) = b \in \mathbb{Z}$

$a < b$

Αφού f συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και $a < b$, από ΘΕΤ.

θα παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές του $(f(a), f(b))$, δηλ.

θα παίρνει και την ακέραια ύλη ρο.