άσκ. 12) $f^3(x) + 2f^2(x) + 3f(x) = x^2 - 4x + 3 + e^{-x}$ (1) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\xi \in (1,2)$

(1) $\xrightarrow{x=1}$ $f^3(1) + 2f^2(1) + 3f(1) = e^{-1} \Leftrightarrow f(1)\cdot\left(f^2(1) + 2f(1) + 3\right) = \frac{1}{e}$ $\Big\} \to f(1) > 0$

$\Delta = 2^2 - 4\cdot 1\cdot 3 = 4 - 12 < 0$

$f^2(1) + 2f(1) + 3 > 0$

(1) $\xrightarrow{x=2}$ $f^3(2) + 2f^2(2) + 3f(2) = 4 - 8 + 3 + e^{-2} \Leftrightarrow f(2)\cdot\underbrace{\left(f^2(2) + 2f(2) + 3\right)}_{+} = \frac{1}{e^2} - 1 = \frac{1-e^2}{e^2} < 0$

Άρα $f(2) < 0$.

Σχόλιο Bolzano

Αν $f$ συνεχής σε διάστημα $\Delta$ και $f(x) \neq 0$ $\forall x \in \Delta$ τότε $f(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $\Delta$.

Δηλ. $f(x) > 0$ $\forall x \in \Delta$ ή $f(x) < 0$ $\forall x \in \Delta$.

$f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, 2\pi]$

Να βρείτε το πρόσημό της.

Λύνω την εξίσωση:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$

$\eta\mu x = \eta\mu(\pi/2 - x) \Leftrightarrow$

$x = 2k\pi + \pi/2 - x$ ή $\cancel{x} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} + \cancel{x}$ ΑΔΥΝ

$2x = 2k\pi + \pi/2 \Leftrightarrow x = k\pi + \pi/4$, $k \in \mathbb{Z}$

$k=0$, $k=1$, $k=2$, $k=-1$

$x = \pi/4$ $\quad x = \pi + \frac{\pi}{4}$ $\quad x = 2\pi + \frac{\pi}{4}$ (Χ) $\quad x = -\pi + \frac{\pi}{4} < 0$ (Χ)

Αφού $f(x)$ συνεχής και δεν μηδενίζεται για $[0, \pi/4)$, $(\frac{\pi}{4}, \pi + \frac{\pi}{4})$, $(\pi + \frac{\pi}{4}, 2\pi]$, από σχόλιο Bolzano $\to$ διατηρεί πρόσημο

| | $0$ | $\pi/4$ | $\pi+\pi/4$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1$ | $1$ | $-1$ | |
| $f(x)$ | $-$ | $+$ | $-$ | |

Επιλέγω $0 \in [0, \pi/4)$ $\quad f(0) = \eta\mu 0 - \sigma\upsilon\nu 0 = -1$

» $\frac{\pi}{2} \in \left(\frac{\pi}{4}, \pi+\pi/4\right)$ $\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = 1$

» $2\pi \in \left(\pi+\frac{\pi}{4}, 2\pi\right]$, $\quad f(2\pi) = \eta\mu 2\pi - \sigma\upsilon\nu 2\pi = -1$

$$(a^2+\beta^2)\cdot(x^2+y^2) \geq (ax+\beta y)^2$$

$a=1$, $\beta=1$, $x = \eta\mu x$, $y = -\sigma\upsilon\nu x$

$$(1+1)\cdot(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x) \geq (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2$$

$$2 \geq (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 \iff$$

$$|\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x| \leq \sqrt{2}$$

$x = \pi - \frac{\pi}{4} \to \sqrt{2}$

$x = 2\pi - \frac{\pi}{4} \to -\sqrt{2}$

Ασκ. 9. / φυλ.

$x^2 + f^2(x) = 5x \quad (1) \qquad x \in [0,5]$

i) Έστω $\rho$ μια ρίζα της $f(x)$ $\Rightarrow f(\rho) = 0$, $\rho \in (0,5)$

$(1) \Rightarrow \rho^2 + \cancel{f^2(\rho)} = 5\rho \iff$

$\rho^2 - 5\rho = 0 \iff \rho\cdot(\rho - 5) = 0 \iff$

$\rho = 0$ ή $\rho = 5$ άτοπο

Άρα $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in (0,5)$ ο.ε.δ.

ii) $f$ συνεχής στο $(0,5)$, $f(x) \neq 0$ $x \in (0,5)$

Από πόρισμα Bolzano $\Rightarrow f(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(0,5)$

(iii) $f(1) = -2 \Rightarrow f(x) < 0 \quad \forall x \in (0,5)$

$(1) \Rightarrow f^2(x) = 5x - x^2 \iff$

$|f(x)| = \sqrt{5x - x^2} \overset{f(x)<0}{\iff}$

$f(x) = -\sqrt{5x-x^2}$, $x \in (0,5)$

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{5x-x^2}, & x \in (0,5) \\ 0, & x = 0 \\ 0, & x = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$f(x) = -\sqrt{5x-x^2}$, $x \in [0,5]$

Scanned with CamScanner