Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής με $f(0)=f(1)$.

Ν.δ.ο. $\exists\ \xi\in[0,1]$ ώστε $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{3})$.

Λύση Έστω $A(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{3})$.

♡ $A(x)$ συνεχής στο $[0, 2/3]$ πράξεις + συνθέσεις συνεχ.

♡ $A(0)=f(0)-f(\frac{1}{3})$

$A(\frac{1}{3})=f(\frac{1}{3})-f(\frac{2}{3})$

$A(\frac{2}{3})=f(\frac{2}{3})-f(1)$

$A(0)+A(\frac{1}{3})+A(\frac{2}{3})=0$

Άρα οι όροι $A(0)$, $A(\frac{1}{3})$, $A(\frac{2}{3})$ ή είναι όλοι ίσοι με 0 ή υπάρχει ζεύγος ετεροσήμων.

Αν είναι όλοι 0 τότε το ζητούμενο ξ: $\xi=0$ ή $\xi=\frac{1}{3}$ ή $\xi=\frac{2}{3}$

Αν υπάρχει ζεύγος ετεροσήμων π.χ. $A(0)\cdot A(\frac{2}{3})<0$

Από Θ. Bolzano $\Rightarrow$ $\exists\ \xi\in(0,\frac{2}{3})$: $A(\xi)=0$

ο.ε.δ.

ασκ. 2 $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$, $a\neq 0$. $a\gamma+\beta\gamma+\gamma^2<0 \Leftrightarrow \gamma\cdot(a+\beta+\gamma)<0$

♡ f συνεχής στο $[0,1]$ πολ.

♡ $f(0)\cdot f(1)=\gamma\cdot(a+\beta+\gamma)<0$ (γ)

$\to$ Από Θ. Bolzano $\to \exists x_1\in(0,1): f(x_1)=0$

Αφού το τριώνυμο β' βαθμού f(x) έχει ρίζα $\to \Delta\geq 0$

Αν $\Delta=0$ τότε το τριώνυμο έχει το πρόσημο του a $\forall x\in\mathbb{R}-\{x_1\}$

όμως $f(0), f(1)$ ετερόσημα $\to$ άτοπο. Άρα $\Delta>0$.

$\boxed{(-1,1)}$

ασκ. 13 $\frac{k^2}{x}+\frac{\lambda^2}{x+1}+\frac{\mu^2}{x-1}=0$ (1) Για $x\neq 0$, $x\neq -1$, $x\neq 1$ η εξίσωση είναι ισοδύναμη

με $\underbrace{(x+1)\cdot(x-1)\cdot k^2+x\cdot(x-1)\cdot\lambda^2+x\cdot(x+1)\cdot\mu^2}_{A(x)}=0$ (2)

♡ $A(x)$ συνεχής

$A(-1)=-1\cdot(-2)\cdot\lambda^2=2\lambda^2>0$

$A(0)=1(-1)k^2=-k^2<0$

Από Θ. Bol. $\Rightarrow \exists x_1\in(-1,0)$ ώστε $A(x_1)=0$. Αφού $x_1\neq -1,0,1 \to x_1$ ρίζα και της (1)

♡ $A(0)=-k^2<0$

$A(1)=1\cdot 2\mu^2>0$

Από Θ. Bolz. $\to \exists x_2\in(0,1)\to x_2$ ρίζα της 2

$A(x)$ πολυώνυμο β' βαθμού $\Rightarrow$ όχι παραπάνω από 2 ρίζες. Άρα 2 ακριβώς.

ii) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{-\frac{\beta}{a}}{\frac{\gamma}{a}}=\ldots$