ασκ.1

$$x\cdot f(x) - x^4 + ημ(ax) = x^2\cdot ημ\left(\frac{1}{x}\right) \quad (1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(0) = -a \neq 0$$

i) $(1) \xrightarrow{x\neq 0} f(x) - x^3 + \frac{ημ(ax)}{x} = x\cdot ημ\frac{1}{x} \Leftrightarrow$

$$\boxed{f(x) = x^3 - a\,\frac{ημ(ax)}{ax} + x\cdot ημ\frac{1}{x}. \quad (2)}$$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{ημ(ax)}{ax} = 1.$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot ημ\frac{1}{x}\right) = 0$ (Σελ. 52)

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0^3 - a\cdot 1 + 0 = -a$

Αφού $f(0) = -a \rightarrow$ f συνεχής στο 0.

ii) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

Για $x<0$. $f(x)$ δίνεται από σχέση (2)

$\lim\limits_{x\to -\infty}(x^3) = -\infty.$

$$\left|\frac{ημax}{ax}\right| = \frac{|ημax|}{|ax|} \leq \frac{1}{|ax|}$$

$$-\frac{1}{|ax|} \leq \frac{ημax}{ax} \leq \frac{1}{|ax|}$$

$\to 0$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(x\cdot ημ\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to -\infty}\frac{ημ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = L$$

Θέτω $u = \frac{1}{x}$. όταν $x\to -\infty \Rightarrow u \to 0^-$

$$L = \lim_{u\to 0}\frac{ημu}{u} = 1$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \dots +\infty$

iii) Για $x \neq 0$ από (2) f συνεχής (πράξεις συνεχών). Για $x=0$, έδειξα από (i) f συνεχής. Άρα f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Αφού $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. Άρα $\exists\, β$ κοντά στο $+\infty$ ώστε $f(β) > 0$.

Αφού $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \rightarrow \exists\, α$ κοντά στο $-\infty$ ώστε $f(α) < 0$. Αφού f συνεχής στο $[α,β]$ από Θ. Bolzano $\Rightarrow \exists$ 1 τουλ. ρίζα.

$P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Έστω περ. $a_\nu > 0$ $\quad$ ν περιττός

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty}(a_\nu x^\nu) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty}(a_\nu x^\nu) = -\infty$$

$\exists$ α κοντά στο $+\infty$, β κοντά στο $-\infty$ ...

Άσκ. 4 $\quad f(x) = x^3 + ax^2 + b$, $\quad b > 0$, $\quad a + b < -1$.

$f(1) = 1 + a + b < 0$. $\quad f(0) = b > 0$. $\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \to$

$\to \exists\, \gamma$ κοντά στο $-\infty$ με $f(\gamma) < 0$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists\, \delta$ κοντά στο $+\infty$ ώστε $f(\delta) > 0$

	γ	0	1	δ
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Αφού $f(x)$ 3ου βαθμού $\to$ δεν έχει περισσότερες από 3 ρίζες. Άρα 3 ακριβώς.

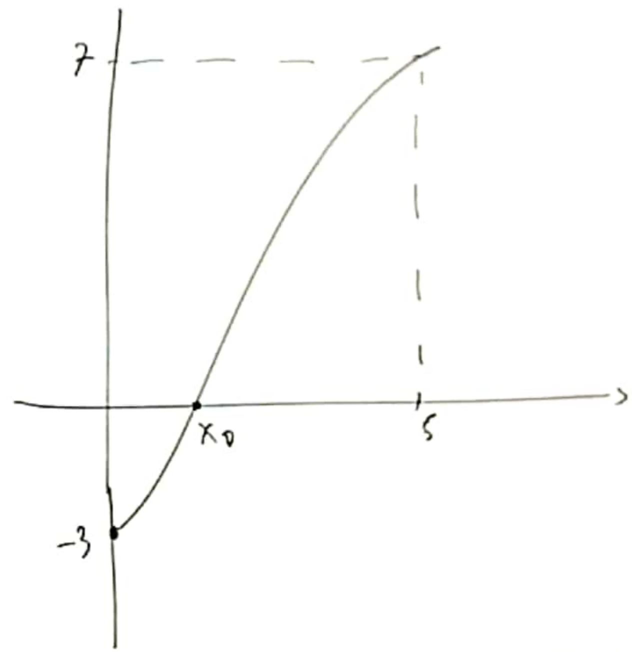
<u>Άσκηση:</u> Έστω f συνεχής στο $[0,5]$, $f(0) = -3$, $f(5) = 7$

Ν.δ.ο. η εξίσωση $|f(x)| = x$ έχει 2 τουλάχιστον ρίζες στο $(0,5)$

Έστω $A(x) = |f(x)| - x$

$A(0) = |f(0)| = |-3| = 3 > 0$

$A(5) = |f(5)| - 5 = 7 - 5 = 2 > 0$



♡ f συνεχής στο $[0,5]$

♡ $f(0)\cdot f(5) = -21 < 0$

Από Θ.Bol. $\Rightarrow \exists\, x_0 \in (0,5)$, $f(x_0) = 0$.

♡ $A(x)$ συνεχής στο $[0, x_0]$ πράξεις συνεχών

♡ $A(0) = 3 > 0$

$A(x_0) = |f(x_0)| - x_0 = -x_0 < 0$

Από Θ. Bolz. $\Rightarrow$

$\exists\, x_1 \in (0, x_0): A(x_1) = 0$

$\Leftrightarrow |f(x_1)| = x_1$

Ομοίως Bolzano για την $A(x)$

στο $[x_0, 5]$

$|f(x)| = x \Leftrightarrow |f(x)|^2 = x^2 \Leftrightarrow$

Άσκ.5 $f(x)=(a^2+1)x^2-2x-3$. $f(x)+g(x)=\beta\cdot x$ (1)

ρ_1, ρ_2 ρίζες της f.

Από (1) $\Rightarrow$ $g(x)=-f(x)+\beta x$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ (πράξεις συνεχών).

$$\left.\begin{aligned} g(\rho_1) &= -f(\rho_1)+\beta\rho_1 = \beta\rho_1 \\ g(\rho_2) &= \beta\cdot\rho_2 \end{aligned}\right\} \quad g(\rho_1)\cdot g(\rho_2) = \beta^2\cdot\rho_1\cdot\rho_2 \leq 0$$

Στην άσκηση: $\rho_1\cdot\rho_2 = \dfrac{-3}{a^2+1} < 0$

ΘΥΜ. η $Ax^2+Bx+\Gamma=0$ με ρίζες ρ_1, ρ_2 έχει

$\rho_1+\rho_2 = -\dfrac{B}{A}$

$\rho_1\cdot\rho_2 = \dfrac{\Gamma}{A}$

<u>1η περ.</u> Αν $g(\rho_1)=0 \rightarrow \rho_1$ ρίζα της g

<u>2η περ.</u> Αν $g(\rho_2)=0 \Rightarrow \rho_2$ " "

<u>3η περ.</u> Αν $g(\rho_1)\cdot g(\rho_2)\neq 0 \rightarrow g(\rho_1)\cdot g(\rho_2)<0$

από Θ. Bolzano $\Rightarrow \exists\, x_0\in(\rho_1,\rho_2)$ $g(x_0)=0$

Άσκ. 6 $f(a)=g(b)=a$, $f(b)=g(a)=b$. $3f(3)+4g(3)=7\cdot 3$. $[a,b]$

Έστω $A(x)=3f(x)+4g(x)-7x$

♡ $A(x)$ συνεχής στο $[a,b]$ πράξεις συνεχ.

♡ $A(a)=3f(a)+4g(a)-7a=3a+4\cdot b-7a=4\cdot(b-a)>0$

<0

$A(b)=$

Άσκ. 10

$f^2(a)+f^2(b)+2\leq 2\left(f(a)-f(b)\right) \Leftrightarrow$

$f^2(a)+f^2(b)+2-2f(a)+2f(b)\leq 0 \Leftrightarrow$

$\left(f^2(a)-2f(a)+1\right)+\left(f^2(b)+2f(b)+1\right)\leq 0 \Leftrightarrow$

$\left(f(a)-1\right)^2+\left(f(b)+1\right)^2\leq 0 \Leftrightarrow$

$f(a)-1=0$ και $f(b)+1=0$

$f(a)=1$ $f(b)=-1$

Scanned with CamScanner

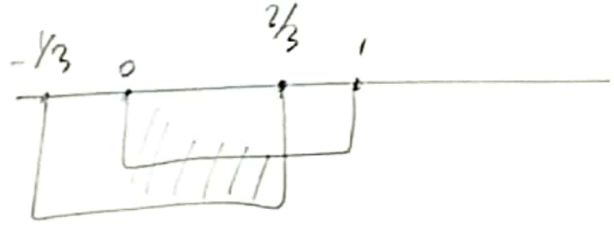
f συνεχής στο $[0,1]$, $f(0) = f(1)$. Ν.δ.ο. $\exists\, \xi \in (0,1) : f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{3})$

Έστω $A(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{3})$

Πρέπει: $0 \leq x \leq 1$ και $0 \leq x + \frac{1}{3} \leq 1$

$-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$

Άρα $D_{A(x)} = [0, \frac{2}{3}]$



$A(\frac{2}{3}) = f(\frac{2}{3}) - f(1)$

$A(0) = f(0) - f(\frac{1}{3})$

$A(\frac{1}{3}) = f(\frac{1}{3}) - f(\frac{2}{3})$

$A(0) + A(\frac{1}{3}) + A(\frac{2}{3}) = f(0) - f(1) = 0$