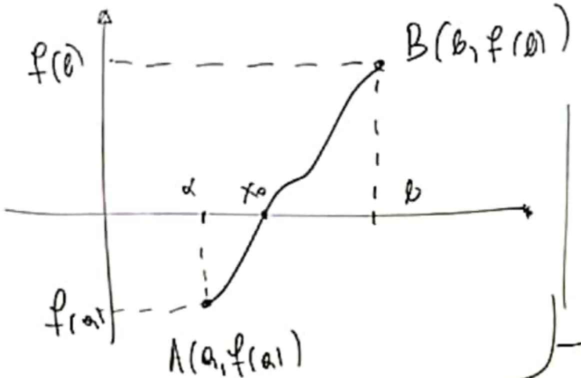
f συνεχής στο $[\alpha,\beta] \iff$ 1) f συνεχής στο (α,β) και

2) $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha)$, $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta)$.

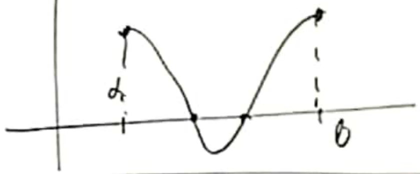
Θεώρημα (Bolzano) Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ τότε $\exists\, x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=0$

Γεωμετρική ερμηνεία:



Γεωμετρικά, το Θ. Bolzano, λέει ότι υπάρχει σημείο με τετμημένη $x_0\in(\alpha,\beta)$ στο οποίο η C_f τέμνει τον $x'x$

$\bar{p}_1$ ή $\bar{p}_2 \Rightarrow \bar{q}$ (λάθος)



Αντιθετοαντιστροφή:

$Π_1: \; p \Rightarrow q$

$αΠ_1: \; \bar{q} \Rightarrow \bar{p}$

$\left.\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q$

$\left.\begin{matrix} p_1 \\ \bar{q} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \bar{p}_2$

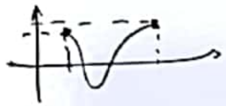
Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $\forall x\in(\alpha,\beta)$ $f(x)\neq 0$ τότε $f(\alpha)\cdot f(\beta)\geq 0$

Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\neq 0$ $\forall x\in(\alpha,\beta)$ τότε $f(x)$ διατηρεί πρόσημο στο (α,β). Δηλ. $f(x)>0$ $\forall x\in(\alpha,\beta)$ ή $f(x)<0$ $\forall x\in(\alpha,\beta)$

Ερωτήσεις Σ-Λ.

1) Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο <u>πεδίο ορισμού</u> της, $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε $\exists\, x_0 \in (\alpha,\beta) : f(x_0)=0$. <u>Π.χ.</u> $f(x)=\frac{1}{x}$. $D_f=\mathbb{R}^*$ $f(-1)<0$, $f(1)>0$ Λ

2) Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$, τότε $\nexists\, x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=0$. Λ



3) Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$, τότε $\exists\, x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=0$ Λ

4) Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ασυνεχής στο $[\alpha,\beta]$, $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε $\nexists\, x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=0$ Λ

5) Υπάρχει συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ασυνεχής στο $[\alpha,\beta]$, $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ με $f(x_0)=0$ όπου $x_0\in(\alpha,\beta)$ Σ

6) Υπάρχει " " $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$ με $f(x_0)=0$ όπου $x_0\in(\alpha,\beta)$. Σ

7) Έστω f συνεχής <u>στο π.ο. της</u> και $f(x)\neq 0$ $\forall x\in D_f$, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο D_f Λ