Συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\boxed{f(x+y)=f(x)\cdot \text{συν}\, y+f(y)\cdot \text{συν}\, x \quad (1)}$ $\forall x,y\in\mathbb{R}$

και $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1 \quad (2)}$ Ν.δ.ο. i) $f(0)=0$, ii) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

iii) Ν.δ.ο. f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(i) Για $x=y=0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} f(0)=f(0)\cdot 1+f(0)\cdot 1 \Leftrightarrow f(0)=2f(0) \Leftrightarrow f(0)=0$ ο.ε.δ.

(ii) Αφού $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ $\Big\}$ Από γνωστό λήμμα $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

(iii) Έστω τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}$. Θ.δ.ο. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{u\to 0}f(u+x_0)\overset{(1)}{=}\lim_{u\to 0}\left(f(u)\cdot\text{συν}\,x_0+f(x_0)\cdot\text{συν}\,u\right)=\lim_{u\to 0}\left(f(u)\cdot\text{συν}\,x_0\right)+\lim_{u\to 0}\left(f(x_0)\cdot\text{συν}\,u\right)$$

$$=0\cdot\text{συν}\,x_0+f(x_0)\cdot\text{συν}\,0=f(x_0)$$

Θέτω $x-x_0=u \Leftrightarrow x=u+x_0$

όταν $x\to x_0 \rightarrow u\to 0$

$x=x_0$
$x-x_0=0$

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

Scanned with CamScanner

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$ (1) $\forall x,y\in(0,+\infty)$

και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$ (2) Να δ.ο. $f(1)=0$, f συνεχής στο $x_0=1$,

f συνεχής στο $(0,+\infty)$

α) Για $x=y=1 \xrightarrow{(1)} f(1)=f(1)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

β) Αφού $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ Από γνωστό λήμμα $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}f(x)=0=f(1)$

Άρα f συνεχής στο $x_0=1$

γ) Έστω τυχαίο $x_0\in(0,+\infty)$, θ.δ.ο. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{u\to 1}\left[f(u\cdot x_0)\right]\overset{(1)}{=}\lim_{u\to 1}\left[f(u)+f(x_0)\right]=\lim_{u\to 1}\left(f(u)\right)+f(x_0)=0+f(x_0)=f(x_0)$$

Θέτω $\dfrac{x}{x_0}=u \Leftrightarrow x=u\cdot x_0$

όταν $x\to x_0 \Rightarrow u\to 1$

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

$x=x_0$

$\dfrac{x}{x_0}=1$

Scanned with CamScanner

Αν $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Ν.δ.ο. f συνεχής στο x_0

$$x < x_0 \xrightarrow{f \uparrow} f(x) < f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq \lim_{x \to x_0^-} f(x_0) = f(x_0) \quad (1)$$

$$x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) \geq f(x_0) \quad (2)$$

Αφού $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ Άρα $\ell = f(x_0)$

$\eta\mu x \leq 1$, $\eta\mu x \leq 2$