άσκ. 4 $\quad f^3(x)+f(x)=x \quad (1)$

α) Ν.δ.ο. f συνεχής στο $x_0=0$

β) f συνεχής στο $\mathbb{R}$

$(1) \xRightarrow{x=0} f^3(0)+f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)\cdot\left(f^2(0)+1\right)=0 \Leftrightarrow$

$f(0)=0$ ή $f^2(0)=-1$ αδύν.

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$$(1) \Rightarrow f(x)\cdot\left(f^2(x)+1\right)=x, \quad f^2(x)+1>0 \Rightarrow \neq 0 \Bigg\} \Rightarrow f(x)=\frac{x}{f^2(x)+1} \Rightarrow |f(x)| = \frac{|x|}{f^2(x)+1} \leq \frac{|x|}{1}$$

Άρα $|f(x)| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq f(x) \leq |x|$, $\quad \lim_{x\to 0}|x| = 0$ $\Big\}$ Από Κ.Π. $\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$

άρα f συνεχής στο $x_0=0$

β) Έστω $x_0\in\mathbb{R}$ τυχαίο θ.δ.ο. $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$$\left.\begin{aligned} &f^3(x)+f(x)=x \\ &(1) \xrightarrow{x=x_0} f^3(x_0)+f(x_0)=x_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f^3(x)-f^3(x_0)+f(x)-f(x_0)=x-x_0 \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)-f(x_0)\right)\cdot\left(f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)\right)+\left(f(x)-f(x_0)\right)=x-x_0 \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)-f(x_0)\right)\cdot\left(\underbrace{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1}_{A(x)}\right)=x-x_0 \Leftrightarrow$$

$a^2+ab+b^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$2a^2+2ab+2b^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$a^2+\underbrace{a^2+2ab+b^2}+b^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$a^2+(a+b)^2+b^2 \geq 0 \rightarrow A(x)>0$

$$f(x)-f(x_0)=\frac{x-x_0}{A(x)} \Rightarrow \left|f(x)-f(x_0)\right| = \frac{|x-x_0|}{A(x)} \leq \frac{|x-x_0|}{1} \Leftrightarrow$$

$$-|x-x_0| \leq f(x)-f(x_0) \leq |x-x_0| \Leftrightarrow \underbrace{-|x-x_0|+f(x_0)}_{\to f(x_0)} \leq f(x) \leq |x-x_0|+f(x_0)$$

$f(x_0)$

ασκ. 4 $\quad f^3(x)+f(x)=x \quad (1)$

α) Ν.δ.ο. f συνεχής στο $x_0=0$

β) f συνεχής στο $\mathbb{R}$

$f(x)\cdot\left(f^2(x)+1\right)=x \rightarrow$

$f(x)=\dfrac{x}{f^2(x)+1} < \dfrac{x}{1}=x$

γ) Ν.δ.ο. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Βήμα 1

Θ.δ.ο. $f\uparrow$. Έστω $A(x)=x^3+x$. δ.ο. $A(x)\uparrow$

$(1) \Rightarrow A(f(x))=x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \overset{(1)}{\Rightarrow} A(f(x_1))<A(f(x_2)) \xrightarrow{A\uparrow} f(x_1)<f(x_2)$

Άρα $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$

Βήμα 2 $\quad \exists x_0\in\mathbb{R}: f(x_0)=1$

$(1) \xrightarrow{x=2} f^3(2)+f(2)=2$

$A(1)=2$

$\Rightarrow A(f(2))=A(1) \Leftrightarrow \boxed{f(2)=1}$

Βήμα 3

Αφού $f\uparrow \Rightarrow \forall x>2 \rightarrow f(x)>f(2)=1$

Θεωρώ $x>2 \rightarrow f(x)>1 \Rightarrow f^3(x)>f(x)$

$$\underbrace{f^3(x)+f(x)} > 2f(x)$$

$$x>2f(x)$$

$$\frac{x}{2}>f(x)$$

και $\rightarrow 2f^3(x) > f^3(x)+f(x)$

$2f^3(x) > x$

$f^3(x) > \frac{x}{2} \Rightarrow f(x) > \sqrt[3]{\frac{x}{2}}$

$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{x}{2}}=+\infty \rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

ασκ.5 f περιττή συνεχής στο $x_0 = 1$ $f(-x) = -f(x)$

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-5}{x-1} = 10$. (1)

Θέτω $A(x) = \dfrac{f(x)-5}{x-1} \Rightarrow f(x) = (x-1)\cdot A(x) + 5 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 5$ $\Big\} \Rightarrow f(1) = 5$

f συνεχής στο $x_0 = 1$

(ii) (1) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-f(-x)-5}{x-1} = 10 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(-x)+5}{-x+1} = 10 \Leftrightarrow \lim\limits_{u\to -1} \dfrac{f(u)+5}{u+1} = 10$

Θέτω $u = -x$. όταν $x \to 1 \Rightarrow u \to -1$

Ομοίως, δείχνω ότι $\lim\limits_{u\to -1} f(u) = -5$ $\Big\} \Rightarrow$ f συνεχής στο -1

Αφού f περιττή $\Rightarrow f(-1) = -f(1) = -5$

(iii) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{f(x)+5}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{u\to 1} f(-u) = -\lim\limits_{u\to 1} f(u) = -5$

$x = -u$

f συνεχής στο x_0, $f(x_0) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 (Σ)

Αφού f συνεχής στο x_0 $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) > 0$. Άρα $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

(4) f συνεχής στο x_0, g ασυνεχής στο x_0 | (Σ) Με απαγωγή σε άτοπο.

Έστω $f+g$ συνεχής στο x_0

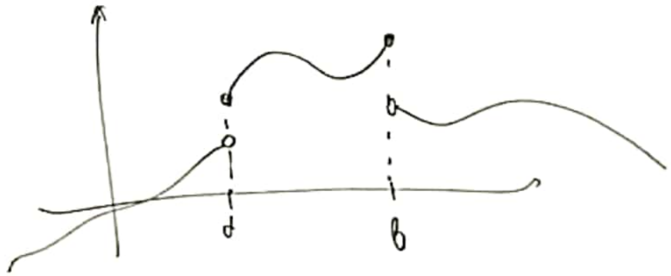
$g = (f+g) - f \Rightarrow g$ συνεχής σαν διαφορά συνεχών. Άτοπο.

<u>Ορισμός:</u> f συνεχής στο $(\alpha, \beta) \Leftrightarrow f$ συνεχής σε κάθε $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

f συνεχής στο $[\alpha, \beta] \Leftrightarrow$ f συνεχής στο (α, β), $\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$, $\lim\limits_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$.

<u>Ερ.</u> $\exists$ συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ασυνεχής στο $x_0 = \alpha$

<u>ΝΑΙ</u>



Scanned with CamScanner