ασκ.6 $\quad P(x)$ πολυώνυμο = ?

$P(0) = 2 \; (1), \quad \lim_{x \to +\infty} \dfrac{3P(x)}{x^3+x-2} = 3 \; (2), \quad \lim_{x \to -1} \dfrac{P(x)}{x+1} = 1 \; (3)$

Αν $P(x) = a_\nu x^\nu + \cdots + a_1 x + a_0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3P(x)}{x^3+x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3a_\nu x^\nu}{x^3} \begin{cases} +\infty, & \nu > 3 \\ = 3a_\nu, & \nu = 3 \\ 0, & \nu < 3 \end{cases}$$

Αρα βαθ. $P(x) = 3. \longrightarrow P(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta.$

$(2) \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \dfrac{3ax^3}{x^3} = 3 \Leftrightarrow 3a = 3 \Leftrightarrow \boxed{a = 1}$

$(3) \Rightarrow \lim_{x \to -1} \underbrace{\dfrac{x^3+bx^2+\gamma x+2}{x+1}}_{A(x)} = 1$

$x^3+bx^2+\gamma x+2 = (x+1)\cdot A(x) \Rightarrow$

$\lim_{x \to -1}(x^3+bx^2+\gamma x+2) = \lim_{x \to -1}\left[(x+1)\cdot A(x)\right] \Leftrightarrow$

$-1+b-\gamma+2 = 0 \cdot 1 = 0$

$b-\gamma+1 = 0 \Leftrightarrow$

$b = \gamma - 1$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3+(\gamma-1)x^2+\gamma x+2}{x+1} = 1 \Leftrightarrow$$

1	$\gamma-1$	γ	2	-1
↓	-1	$-\gamma+2$	-2	
1	$\gamma-2$	2	$\boxed{0}$	

$$\lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}\cdot\left(x^2+(\gamma-2)x+2\right)}{\cancel{x+1}} = 1 \Leftrightarrow$$

$1+(\gamma-2)(-1)+2 = 1 \Leftrightarrow -\gamma+2+3 = 1 \Leftrightarrow$

$-\gamma = -4 \Rightarrow \boxed{\gamma = 4}, \quad \boxed{b = 3} \quad P(x) = x^3+3x^2+4x+2$

Scanned with CamScanner

αση. 9

$f(x)=\sqrt{\lambda x^2+2x+1}-\sqrt{x^2+1}$

$\lim_{x\to-\infty}(\lambda x^2+2x+1)=\lim_{x\to-\infty}(\lambda x^2)$

- $\lambda>0$: $+\infty \Rightarrow \lambda x^2+2x+1>0$ κοντά στο $-\infty \Rightarrow$ ok.
- $\lambda<0$: $-\infty$
- $\lambda=0$: $\lim_{x\to-\infty}(2x)=-\infty$

τότε $\lambda x^2+2x+1<0$ κοντά στο $-\infty \Rightarrow$ η f δεν ορίζεται κοντά στο $-\infty$

Άρα για να είναι η f ορισμένη κοντά στο $-\infty$, πρέπει και αρκεί $\lambda>0$

$f(x)=|x|\sqrt{\lambda+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-|x|\cdot\sqrt{1+1/x}\overset{x<0}{=}-x\underbrace{\left(\sqrt{\lambda+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+1/x}\right)}_{A(x)}$

$\lim_{x\to-\infty}A(x)=\sqrt{\lambda}-1$

1η περ. $\sqrt{\lambda}>1 \Leftrightarrow \lambda>1$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

2η περ. $\sqrt{\lambda}<1$ και $0<\lambda<1$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

3η περ. $\lambda=1$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=$

$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)=$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+1}}=$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\left(\sqrt{1+2/x+1/x^2}+\sqrt{1+1/x}\right)}=\frac{2}{-2}=-1$

Scanned with CamScanner

$\underline{\text{ασκ. 8}}$ (β) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-x+1}+ax+b\right)=2 \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(-x\cdot\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+ax+b\right)=2 \Leftrightarrow$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left[x\cdot\underbrace{\left(-\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a+\frac{b}{x}\right)}_{A(x)}\right]=2 \quad (1)}$$

$\lim_{x\to-\infty}A(x)=a-2.$

Αν $a-2>0 \Leftrightarrow a>2$

$(1) \Rightarrow -\infty=2$ άτοπο

Αν $a-2<0 \Leftrightarrow a<2$

$(1) \Leftrightarrow +\infty=2$ άτοπο

Αν $a=2 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-x+1}+2x+b\right)=2 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-x+1-(2x+b)^2}{\sqrt{4x^2-x+1}-2x-b}=2 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-x+1-4x^2-4bx-b^2}{-x\cdot\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-2x-b}=2$$