ΑΣΚ.1 - Β΄ΟΜ/Σ.69 ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ : Τετάρτη 29/11

i) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\mu x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(|x|\cdot\sqrt{1+1/x^2}+\mu x\right) \overset{x<0}{=} \lim_{x\to-\infty}\left[x\cdot\underbrace{\left(-\sqrt{1+1/x^2}+\mu\right)}_{A(x)}\right] = L$

Τώρα $\lim_{x\to-\infty} A(x) = \mu-1$

1η περ. Αν $\mu-1>0 \Leftrightarrow \mu>1 \;\rightarrow\; L=-\infty$

2η $\mu-1<0 \Leftrightarrow \mu<1 \;\rightarrow\; L=+\infty$.

3η $\mu=1$. Το αρχικό όριο : $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$

Θεώρημα: Αν $f(x)<A(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ και $\lim_{\substack{x_0\\ \infty}} A(x)=-\infty \rightarrow \lim_{\substack{x_0\\ \infty}} f(x)=-\infty$

Αν $A(x)<f(x) \rightarrow$ $\lim_{\substack{x_0\\ \infty}} A(x)=+\infty \rightarrow \lim_{\substack{x_0\\ \infty}} f(x)=+\infty$

άσκ 5 $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+\eta\mu x\right)$

$-1\le \eta\mu x\le 1 \Leftrightarrow x^2-1\le x^2+\eta\mu x\le x^2+1$

$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)=+\infty$

$\rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(x^2+\eta\mu x\right)=+\infty$

Ξέρω $|ημx| \le |x| \xrightarrow{x \le 0} ημx \ge x \iff x^2+ημx \ge x^2+x$ ✓

$\lim_{x\to-\infty}(x^2+x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

Ζητάω $\lim_{x\to+\infty}(x^2+ημx)$

Ξέρω $|ημx| \le |x| \xrightarrow{x \ge 0} ημx < x \Rightarrow x^2+ημx < x^2+x \Big\}$ (?)

$\lim_{x\to+\infty}(x^2+x) = +\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{ημx}{x} = 0$

$\left|\frac{ημx}{x}\right| = \frac{|ημx|}{|x|} \le \frac{1}{|x|}$

$-\frac{1}{|x|} \le \frac{ημx}{x} \le \frac{1}{|x|}$

$\to 0$

$\lim_{x\to-\infty}(x^2+ημx) = \lim_{x\to-\infty}\left[x\cdot\underbrace{\left(x+\frac{ημx}{x}\right)}_{A(x)}\right] = L$

$\lim_{x\to-\infty} A(x) = -\infty \to L = +\infty.$

<u>λύση</u> $\lim_{x\to-\infty}(x^2+ημx)$

$-1 \le ημx \le 1 \Leftarrow x^2-1 \le x^2+ημx \le x^2+1 \Big\} \to \lim_{x\to-\infty}(x^2+ημx) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(x^2-1) = +\infty$

ασκ.4

i) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\overset{x-1}{ax+b}}{1}-\frac{\overset{1}{x^2}}{x-1}\right)=0 \Rightarrow a,\ b=?$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2+(a+b)\cdot x-b-x^2}{x-1}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-1)\cdot x^2+(a+b)\cdot x-b}{x-1}=0 \quad (1)$$

1η περ. $a-1>0 \Rightarrow a>1$

$$(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{(a-1)\cdot x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=0 \Leftrightarrow +\infty=0$$ άτοπο.

2η περ. $a-1<0 \Rightarrow a<1$

$(1) \Rightarrow -\infty=0$ άτοπο.

3η περ. $\boxed{a=1}$. $$(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{(1+b)\cdot x-b}{x-1}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{(1+b)\cdot \cancel{x}}{\cancel{x}}=0 \Leftrightarrow 1+b=0 \quad \boxed{b=-1}$$

ασκ.5 / (ΣΤ)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu 2x}{x^3-x+2}=L$$

$-1\le -\sigma\upsilon\nu 2x\le 1$

$-1\le \eta\mu x\le 1 \overset{x>0}{\Longrightarrow} -x\le x\eta\mu x\le x$

$$\boxed{-x-1\le x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu 2x\le x+1 \quad (1)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3-x+2)=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty \Rightarrow$$
$x^3-x+2>0$ κοντά στο $+\infty$

$$(1) \Rightarrow \frac{-x-1}{x^3-\dots}\le\frac{x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu 2x}{x^3-\dots}\le\frac{x+1}{x^3-\dots}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-1}{x^3-\dots}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\cancel{x}}{x^{\cancel{3}2}}=0$$

Από ΚΠ $\Rightarrow L=0$