ασκ 3 / Μη περασμένο.

Να βρείτε $a, b \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει το $\lim_{x\to 1} f(x)$

α) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax+b}{x-1}, & x<1 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}, & x>1 \end{cases}$

Έχω $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+3-4}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)}{\cancel{(x-1)}\cdot(\sqrt{x^2+3}+2)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Για να υπάρχει το $\lim_{x\to 1} f(x)$, πρέπει και αρκεί $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\lim_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+ax+b}{x-1} = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+ax-1-a}{x-1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

Από προηγούμενο λήμμα,

αφού $\lim_{x\to 1^-} (x-1) = 0$,

$\lim_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+ax+b}{x-1} \in \mathbb{R}$

Τότε $\lim_{x\to 1^-} (x^2+ax+b) = 0 \Leftrightarrow$

$1+a+b=0 \Rightarrow b=-1-a$

$\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\cancel{(x-1)}\cdot(x+1) + a\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$2+a = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{a=-1{,}5}$

$b = -1+1{,}5 = \boxed{b=0{,}5}$

## άσκ. 2 / Μη πεπερασμένα όρια

(α) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+\lambda x-2}{x^2+2x+1} \in \mathbb{R}$, $\lambda = ?$

Αφού $\lim\limits_{x\to -1}(x^2+2x+1)=0$,

από προηγ. λήμμα. πρέπει

$\lim\limits_{x\to -1}(x^3+\lambda x-2)=0 \iff$

$-1-\lambda-2=0 \iff \lambda=-3.$

Για $\lambda=-3$ έχω:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{(x+1)^2} = \lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}\cdot(x^2-x-2)}{(x+1)^{\cancel{2}}} =$$

| 1 | 0 | -3 | -2 | -1 |
|---|---|---|---|---|
| | -1 | 1 | 2 | |
| 1 | -1 | -2 | $\boxed{0}$ | |

$$\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{x+1}} = -3$$

Άρα για $\lambda=-3$, το αρχικό όριο είναι πεπερασμένο.

## άσκ. 6 / Μη πεπερασμένα

$f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4x+\gamma}$, $x_0=2$. Συμβολ. $L=\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4x+\gamma) = 4-8+\gamma=\gamma-4$

<u>1η περ.</u> Αν $\gamma\neq 4 \Rightarrow L=\dfrac{4+2a+b}{\gamma-4}\in\mathbb{R}$

<u>2η περ.</u> Αν $\gamma=4$. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax+b)=2a+b+4$

(2α) περ. $2a+b+4=0 \to b=-2a-4$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x^2-4x+4} =$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)+a\cdot\cancel{(x-2)}}{(x-2)^{\cancel{2}}} = \lim_{x\to 2}\frac{x+a+2}{x-2}$$

βρίσκω $\lim\limits_{x\to 2}(x+a+2)=a+4$

(2αi) περ. $a=-4 \Rightarrow L=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-4+2}{x-2}=1$

(2αii) περ. $a+4>0$.

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ $\Big\}\ \nexists L$

(2αiii) αν $a+4<0$ ομοίως $\nexists L$.