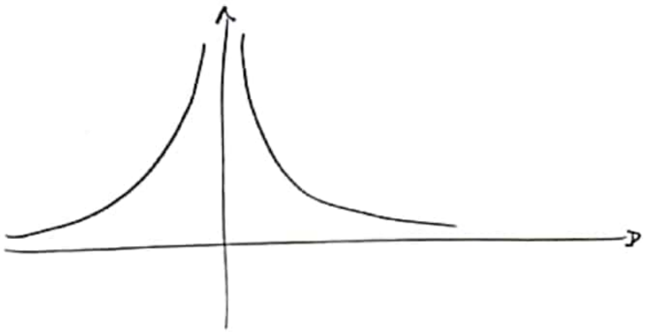
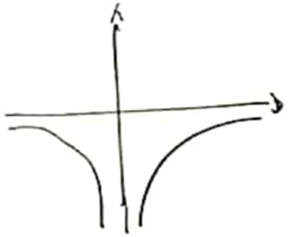
Άπειρα όρια



$f(x)=\frac{1}{|x|}$

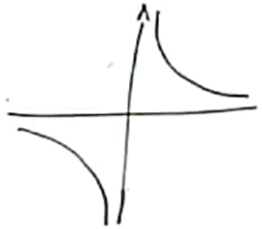
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=+\infty$$

$g(x)=-\frac{1}{|x|}$



$$\lim_{x\to 0}\left(g(x)\right)=-\infty$$

$h(x)=\frac{1}{x}$



$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}&=+\infty\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}&=-\infty\end{aligned}\right|\ \text{Δεν υπάρχει το } \lim_{x\to 0}f(x)$$

Βασικές ιδιότητες

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{(x-x_0)^k}=+\infty$$ k άρτιος θετικός ακέραιος

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{1}{(x-x_0)^k}=+\infty$$ k περιττός θετικός

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{1}{(x-x_0)^k}=-\infty$$

1) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0 $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$

2) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ $\quad f(x)<0$ » » » $=-\infty$

3) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\underline{+}\infty$ τότε $f(x)>0$ για x κοντά στο x_0
$f(x)<0$

4) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$ [Το αντίστροφο δεν ισχύει Δηλ. το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ μπορεί να μην υπάρχει]

5) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)}=+\infty$

6) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$ [Το αντίστροφο δεν ισχύει]

7) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f^{\nu}(x)=+\infty$ για ν θετικό ακέραιο

$f(x)=\frac{1}{x^2}$, $g(x)=-\frac{1}{x^2}+2$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$

$f(x)+g(x)=2 \quad \forall x\in\mathbb{R}^*$. $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+g(x)\right)=2$

το όριο της f είναι	$\alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
το όριο της g »	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
το » της $f+g$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;

ασκ.1 / Σελ.63

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+5}{x^4+3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+5}{x^2\cdot(x^2+3)} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+5}{x^2+3}\cdot\dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+5}{x^2+3} = \dfrac{5}{3} > 0.$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^3-4x^2+5x-2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}\cdot(x^2-3x+2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)}$

1	−4	5	−2	1
↓	1	−3	2	
1	−3	2	$\boxed{0}$	

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{2}{-1} = -2$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$

f	$a>0$	$a<0$	$a>0$	$+\infty$	$+\infty$	0
g	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	∞
$f\cdot g$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;

Αφού $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right) = +\infty$

Μη πεπερασμένα όρια

ασκ.1 (δ) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-x-6}{2-|x|} = \lim_{x\to -2} \frac{\cancel{(x+2)}\cdot(x-3)}{\cancel{2+x}} = -5$

$\lim_{x\to -2} x = -2 < 0 \to x<0$ κοντά στο -2

$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4x+4}{2-|x|} = \lim_{x\to -2} \frac{(x-2)^2}{x+2} = \lim_{x\to -2} \Big[\underbrace{(x-2)^2 \frac{1}{x+2}}_{A(x)}\Big]$

$\lim_{x\to -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty$, $\lim_{x\to -2^+} (x-2)^2 = 16 > 0$. Άρα $\lim_{x\to -2^+} A(x) = +\infty$

ομοίως $\lim_{x\to -2^-} A(x) = -\infty$

(θ) $\lim_{x\to 1} \frac{|x^3-4x^2+5x-2| - |2x^5-x+2| + 3}{x^3-3x^2+3x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{|(x-1)^2| |(x-2)| - (2x^5-x+2)+3}{(x-1)^3}$

1	-4	5	-2	1
↓	1	-3	2	
1	-3	2	$\boxed{0}$	

1	-3	2	1
↓	1	-2	
1	-2	$\boxed{0}$	

$\lim_{x\to 1} (2x^5-x+2) = 3 > 0$

$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(-x+2) - 2x^5 + x + 1}{(x-1)^3} =$

$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\left[(x-1)\cdot(-x+2) - 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 1\right]}{(x-1)^{\cancel{3}\,2}} = -\infty$