Ερωτήσεις Σ - Λ.

1) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x) = \ell > 0$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\sqrt{\ell}$. (Σ)

Απόδειξη. $\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x) = \ell \iff \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^2 = \ell \iff \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\sqrt{\ell}$

2) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f^3(x) = \ell > 0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \sqrt[3]{\ell}$ (Σ)

Απόδειξη: Θέτω $f^3(x) = A(x)$. Αφού $\lim\limits_{x\to x_0} A(x) = \ell > 0$, από θεώρημα (όριο + διάταξη) $\Rightarrow A(x) > 0$ κοντά στο x_0

Άρα $f^3(x) = A(x) \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{A(x)}$ κοντά στο x_0

$\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[3]{A(x)} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to x_0} A(x)} = \sqrt[3]{\ell}$. Άρα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \sqrt[3]{\ell}$

3) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f^4(x) = \ell > 0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\sqrt[4]{\ell}$ (Λ) π.χ. $f(x) = \frac{|x|}{x}$

4) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f^{65}(x) = \ell > 0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \sqrt[65]{\ell}$ (Σ)

ασκ. 1

δ) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x^3+x-3|-x^2}{x^2-1}$ $A(x)$

$\lim\limits_{x\to 1}(x^3+x-3) = -1<0$. Από θεώρημα $\Rightarrow$ $x^3+x-3<0$ κοντά στο 1.

Άρα κοντά στο 1: $\lim\limits_{x\to 1} A(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-x^3-x+3-x^2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-x^3-x^2-x+3}{x^2-1} =$

-1	-1	-1	$+3$	1
$\downarrow$	-1	-2	-3	
-1	-2	-3	$\boxed{0}$	

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}\cdot(-x^2-2x-3)}{\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)} = \dfrac{-6}{2} = -3.$

ασκ. 1

(γ) $\lim_{x \to 1} \frac{|x^3-3x+2|}{x^3-1} = \lim_{x \to 1} \frac{|x-1| \cdot |x^2+x-2|}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}$.

1	0	-3	2	1
	1	1	-2	
1	1	-2	$\boxed{0}$	

Θεωρώ

$\lim_{x \to 1^+} \frac{|x-1| \cdot |x^2+x-2|}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\cancel{(x-1)} \cdot |x^2+x-2|}{\cancel{(x-1)} \cdot (x^2+x+1)} = \frac{0}{3} = 0$

$x \to 1^+ \rightarrow$ τότε $x-1>0$

$\lim_{x \to 1^-} \frac{-\cancel{(x-1)} \cdot |x^2+x-2|}{\cancel{(x-1)} \cdot (x^2+x+1)} = -\frac{0}{3} = 0$. Άρα το ζητούμενο όριο είναι 0.

άσκ. 4

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{f(x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}}_{A(x)}=1 \;,\quad \lim_{x\to 0}\underbrace{\left(g(x)\cdot\left(\sqrt[3]{2x+1}-1\right)\right)}_{B(x)}=2 \;.\quad \lim_{x\to 0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=?$$

Έχω $f(x)=A(x)\cdot\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)$, $\lim_{x\to 0}A(x)=1$, $\lim_{x\to 0}B(x)=2$

Λύνω την εξίσωση $\sqrt[3]{2x+1}-1=0 \Leftrightarrow 2x+1=1 \Leftrightarrow x=0$.

Άρα για $x\neq 0$, κοντά στο 0 είναι $\sqrt[3]{2x+1}-1\neq 0$, ώστε: $g(x)=\dfrac{B(x)}{\sqrt[3]{2x+1}-1}$

Άρα $$f(x)g(x)=A(x)\cdot B(x)\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{2x+1}-1}}_{\Gamma(x)} \quad (1)$$

$$A^3-B^3=(A-B)\left(A^2+AB+B^2\right)$$

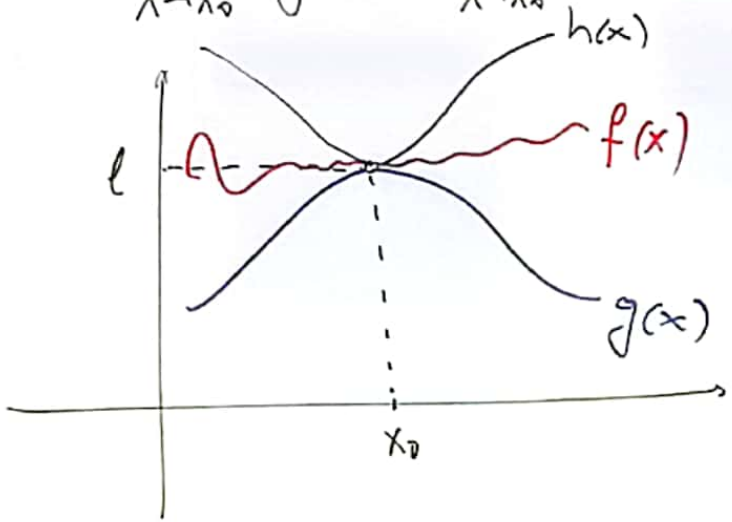
$$A-B=\frac{A^3-B^3}{A^2+AB+B^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\Gamma(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\cdot\dfrac{2x+\cancel{1}-\cancel{1}}{\sqrt[3]{2x+1}^2+\sqrt[3]{2x+1}+1^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x-1+x\right)\left(\sqrt[3]{2x+1}^2+\sqrt[3]{2x+1}+1\right)}{2x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$=\dfrac{3}{2}$. Άρα $\lim_{x\to 0}f(x)g(x)\overset{(1)}{=}1\cdot 2\cdot\dfrac{3}{2}=3$

Κριτήριο Παρεμβολής

Αν $g(x) < f(x) < h(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$ Τότε υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$



$-|a| \leq a \leq |a|$

Χρήσιμα συμπεράσματα

1) Αν $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

Απόδειξη: Από Α' Λυκείου:

$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

Έχω $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$

$\lim_{x \to x_0} \left(-|f(x)|\right) = 0$

Από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

2) Αν $\lim_{x \to x_0} f^2(x) = 0$ Τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

Απόδειξη: ξέρω $|f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$. Άρα $\lim_{x \to x_0} \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{\lim_{x \to x_0} f^2(x)} = \sqrt{0} = 0$

Άρα $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

3) Αν $\lim_{x\to x_0}\left(f^2(x)+g^2(x)\right)=0$ τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$

Απόδειξη: Έχω $0 \le f^2(x) \le f^2(x)+g^2(x)$

Αφού $\lim_{x\to x_0}\left(f^2(x)+g^2(x)\right)=0$

$\lim_{x\to x_0} 0 = 0$

Από κ.π. $\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f^2(x)=0 \Rightarrow$

$\lim_{x\to x_0} f(x)=0$

ομοίως $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$

4) Αν $\lim_{x\to x_0}\left(|f(x)|+|g(x)|\right)=0$ τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$

$0 \le |f(x)| \le |f(x)|+|g(x)|$ κ.ο.κ.

Ασκ. 8

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ και $-3<g(x)<4$ (1) τότε $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=0$

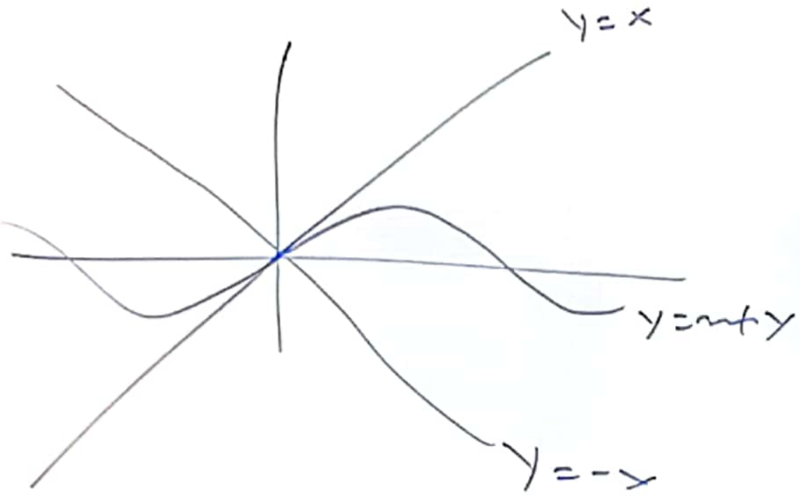
1ος Αν $f(x)\ge 0$ κοντά στο x_0 από (1) $\Rightarrow -3f(x)\le f(x)\cdot g(x)\le 4f(x)$

$\lim_{x\to x_0}\left(4f(x)\right)=\lim_{x\to x_0}\left(-3f(x)\right)=0$

Από κ.π. $\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left(f(x)g(x)\right)=0$

2ος Ομοίως

Θεώρημα: $|\eta\mu x| \le |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Το "=" ισχύει μόνο για $x=0$.



$$\lim_{x\to 0} \eta\mu x = 0$$

$$|\eta\mu x| \le |x| \Rightarrow -|x| \le \eta\mu x \le |x|$$

$$\lim_{x\to 0}|x| = \lim_{x\to 0}\left(-|x|\right) = 0$$

Από κ.π. $\lim_{x\to 0}(\eta\mu x) = 0$

$$\lim_{x\to x_0}(\eta\mu x) = \eta\mu x_0, \quad \lim_{x\to x_0}(\sigma\upsilon\nu x) = \sigma\upsilon\nu x_0$$