ασκ. 17

(α) $f(x) = 3x - 3x^2 + x^3 = \underbrace{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} + 1 =$

$= (x-1)^3 + 1.$ $\quad f \uparrow$ στο $\mathbb{R} \Rightarrow 1-1$

Λύνω την εξίσωση

$f(x) = y$ ως προς x

$(x-1)^3 + 1 = y \iff$

$(x-1)^3 = y - 1 \quad (1)$

αν $y \geq 1 \Rightarrow$

$(1) \iff x - 1 = \sqrt[3]{y-1}$

$x = \sqrt[3]{y-1} + 1$

αν $y < 1$

$(1) \iff x - 1 = -\sqrt[3]{1-y}$

$x = 1 - \sqrt[3]{1-y}$

Άρα $f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y-1} + 1, & y \geq 1 \\ 1 - \sqrt[3]{1-y}, & y < 1 \end{cases}$

(β) κοινά σημεία C_f, $C_{f^{-1}}$

Λύνω την εξίσωση

$f(x) = f^{-1}(x) \overset{f \uparrow}{\iff}$

$f(x) = x \iff$

$x^3 - 3x^2 + 3x = x \iff$

$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

ασκ. 16 $\quad f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

α) Πρέπει

$x^2+1 \geq 0$ και $x+\sqrt{x^2+1} > 0$.

$x^2 \geq -1$

ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$

Ισχύει $x^2 < x^2+1 \Rightarrow$

$$\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$-x \leq |x| < \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$x+\sqrt{x^2+1} > 0$$

2ος τρόπος. $x+\sqrt{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{x^2+1} > -x \quad (1)$$

α' περ. Αν $x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0$. Άρα η (1) ισχύει

$\sqrt{x^2+1} > 0$.

β' περ. Αν $x < 0 \Rightarrow -x > 0$

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}^{\,2} > (-x)^2 \Leftrightarrow x^2+1 > x^2$

$1 > 0$