Μια σημαντική πρόταση: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα.

Τότε οι εξισώσεις $f(x) = f^{-1}(x)$, $x \in A \cap f(A)$ και $f(x) = x$, $x \in A \cap f(A)$ είναι ισοδύναμες. Με άλλα λόγια: Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}, τέμνονται πάνω στην ευθεία $y = x$.

Απόδειξη: Έστω η συνάρτηση $A(x) = f(x) + x$, με $x \in A_f = D_f$

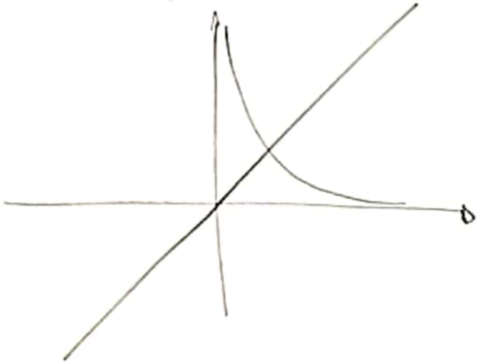
για $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2 \xrightarrow{f \uparrow} \left.\begin{matrix} f(x_1) < f(x_2) \\ x_1 < x_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x_1) + x_1 < f(x_2) + x_2 \Leftrightarrow A(x_1) < A(x_2) \Rightarrow A(x) \uparrow$ στο D_f

Τώρα: $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) + x = f^{-1}(x) + x \Leftrightarrow f(x) + x = f^{-1}(x) + f\left(f^{-1}(x)\right) \Leftrightarrow$

$A(x) = A\left(f^{-1}(x)\right) \underset{1-1}{\overset{A(x)}{\Longleftrightarrow}} x = f^{-1}(x) \underset{1-1}{\overset{f(x)}{\Longleftrightarrow}} f(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) \Leftrightarrow f(x) = x$. ο.ε.δ.

Σχόλιο: Η παραπάνω πρόταση ΔΕΝ ισχύει αν $f \downarrow$

Αντιπαράδειγμα: Έστω $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. Θα βρω την f^{-1}. Λύνω την εξίσωση



$f(x) = y$, ως προς $x \in (0, +\infty) \Leftrightarrow$

$\frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$, $y \in (0, +\infty)$

$f^{-1}(y) = \frac{1}{y}$, $y > 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$

Η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ η οποία αληθεύει $\forall x \in (0, +\infty)$

όμως η εξίσωση $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Leftrightarrow x = 1$

Ασκ.8 / Φυλ.

$$2x^3+1 = -\sqrt[3]{\frac{-x+1}{2}} \quad (*),$$

πρέπει $-x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^3+1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι $\uparrow$ άρα 1-1

Θα βρω τον τύπο της f^{-1}.

Λύνω την εξίσωση

$f(x) = y$ ως προς $x \in \mathbb{R}$

$$2x^3+1 = y \Leftrightarrow$$

$$2x^3 = y-1 \Leftrightarrow$$

$$x^3 = \frac{y-1}{2} \quad (1)$$

Αν $y \geq 1$ τότε $(1) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{y-1}{2}}$

Αν $y \leq 1$ τότε $(1) \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{-y+1}{2}}$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{y-1}{2}}, & y \geq 1 \\ -\sqrt[3]{\frac{-y+1}{2}}, & y \leq 1 \end{cases}$$

Άρα $$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}, & x \geq 1 \\ -\sqrt[3]{\frac{-x+1}{2}}, & x \leq 1 \end{cases}$$

Η εξίσωση $(*) \Leftrightarrow f(x) = f^{-1}(x)$ $\quad x \leq 1$, $f \uparrow$

$\Leftrightarrow f(x) = x$, $\quad x \leq 1 \Leftrightarrow$

$2x^3+1 = x \Leftrightarrow 2x^3 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ \downarrow & -2 & 2 & -1 & \\ \hline 2 & -2 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$(x+1)\cdot(2x^2-2x+1) = 0$

$\Delta = 4 - 4\cdot 2 \cdot 1 < 0$

$x = -1$

άσκ. 6 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$. $3f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x^2+\frac{2}{x^2}-5$ (1), $x>0$

για $x=\frac{1}{x}\to 3f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x^2}+2x^2-5$

$$-6f(x)-4f\left(\frac{1}{x}\right)=-6x^2-\frac{4}{x^2}+10$$

$$9f\left(\frac{1}{x}\right)+6f(x)=\frac{9}{x^2}+6x^2-15 \quad (+)$$

$$5f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{5}{x^2}-5 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}-1 \xrightarrow{x=\frac{1}{x}} \boxed{f(x)=x^2-1,\ x>0}$$

f: 1-1

Λύνω την εξίσωση $f(x)=y$ ως προς $x>0$

$x^2-1=y \Leftrightarrow$

$x^2=y+1$, $y+1>0$

$x=\sqrt{y+1}$ $y>-1$

Scanned with CamScanner