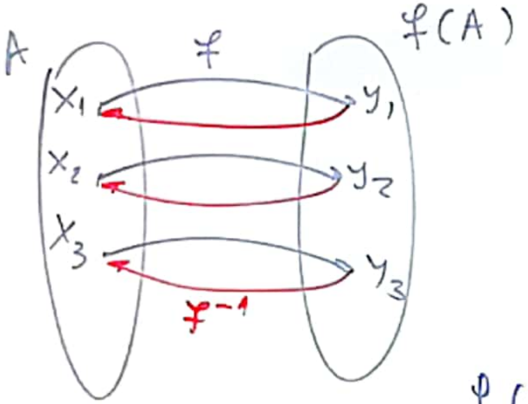
Ορισμός: Έστω $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ 1-1 συνάρτηση με σύνολο τιμών $f(A)$

Τότε για κάθε $y \in f(A)$, $\exists\, x \in A$ ώστε $f(x) = y$.

Τότε ορίζεται η συνάρτηση $f^{-1}: f(A) \longrightarrow A$ τέτοια ώστε

$f^{-1}(y) = x$, $\forall y \in f(A)$. Η συνάρτηση f^{-1} ονομάζεται αντίστροφη της f.



$$f(x_1) = y_1 \quad f^{-1}(y_1) = x_1 \longrightarrow f^{-1}\big(f(x_1)\big) = x_1 \longrightarrow$$

$$\boxed{(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in A}$$

$$f(x_1) = y_1 \Longrightarrow f\big(f^{-1}(y_1)\big) = y_1 \Longrightarrow \big(f \circ f^{-1}\big)(y_1) = y_1 \longrightarrow$$

$$\boxed{\big(f \circ f^{-1}\big)(y) = y \quad \forall y \in f(A)}$$

Πρόταση: Έστω $f: A \longrightarrow f(A)$ 1-1 και $g: f(A) \longrightarrow A$ ώστε $(f \circ g)(x) = x$ $\forall x \in f(A)$

Τότε η g είναι η f^{-1}.

$$\left.\begin{aligned} f\big(g(x)\big) &= x \\ f\big(f^{-1}(x)\big) &= x \end{aligned}\right\} \quad f\big(g(x)\big) = f\big(f^{-1}(x)\big) \xRightarrow{f:1-1} g(x) = f^{-1}(x) \quad \forall x \in f(A)$$

Ασκ.1 / (ε) $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 2}$. f: 1−1, να ορίσετε την f^{-1}

$A_f = \mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2 \in A_f$ με

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow$

$\frac{e^{x_1} - 1}{e^{x_1} + 2} = \frac{e^{x_2} - 1}{e^{x_2} + 2} \Leftrightarrow$

$(e^{x_1} - 1)(e^{x_2} + 2) = (e^{x_2} - 1)(e^{x_1} + 2) \Leftrightarrow$

$\cancel{e^{x_1} \cdot e^{x_2}} + 2e^{x_1} - e^{x_2} - \cancel{2} = \cancel{e^{x_1} \cdot e^{x_2}} + 2e^{x_2} - e^{x_1} - \cancel{2} \Leftrightarrow$

$2e^{x_1} + e^{x_1} = 2e^{x_2} + e^{x_2} \Leftrightarrow$

$\cancel{3}e^{x_1} = \cancel{3}e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \underset{1-1}{\overset{e^x}{\Leftrightarrow}} x_1 = x_2$

Λύνω την εξίσωση $f(x) = y$ ως προς x

$\frac{e^x - 1}{e^x + 2} = y \Leftrightarrow e^x - 1 = y \cdot e^x + 2y \Leftrightarrow$

$e^x - y \cdot e^x = 2y + 1 \Leftrightarrow$

$e^x(1 - y) = 2y + 1 \quad (1)$

(1ον) Αν $1 - y = 0 \Leftrightarrow y = 1$

τότε $(1) \Leftrightarrow 0 \cdot e^x = 3$ αδύνατη

(2ον) Αν $y \neq 1$

$(1) \rightarrow \boxed{e^x = \frac{2y+1}{1-y} \quad (2)}$

Πρέπει $\frac{2y+1}{1-y} > 0 \Leftrightarrow (2y+1)(1-y) > 0$

	$-\infty$	$-1/2$		1	$+\infty$
$2y+1$	−	0	+		+
$1-y$	+		+	0	−
Γινόμ	−		+		−

$y \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

$(2) \Leftrightarrow x = \ln \frac{2y+1}{1-y}$

$f^{-1}(y) = \ln \frac{2y+1}{1-y}, \quad y \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

$f^{-1}(x) = \ln \frac{2x+1}{1-x}, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

Scanned with CamScanner

Ασκ. 1 / (γ) $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$

Πρέπει $1-x \geq 0$ και $1-\sqrt{1-x} \geq 0$

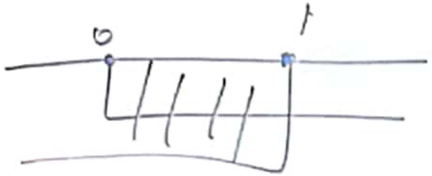
$-x \geq -1$

$x \leq 1$

$1 \geq \sqrt{1-x} \Leftrightarrow$

$1 \geq 1-x \Leftrightarrow$

$x \geq 0$



$x \in [0,1] = A_f$

Θα δ.ο. f είναι 1-1 και θα βρώ την f^{-1} ταυτόχρονα.

Δηλ. θ.δ.ο. $\forall y \in f(A)\ \exists$ μοναδικό $x \in A$: $f(x)=y$

Άρα λύνω την εξίσωση $f(x)=y$ ως προς x.

$\sqrt{1-\sqrt{1-x}} = y \Leftrightarrow$ πρέπει $\boxed{y \geq 0}$

$1-\sqrt{1-x} = y^2 \Leftrightarrow$ Πρέπει $1-y^2 \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{-1 \leq y \leq 1}$

$\sqrt{1-x} = 1-y^2 \Leftrightarrow$

$1-x = (1-y^2)^2 \Leftrightarrow$

$x = 1-(1-y^2)^2$ μοναδική λύση, άρα f: 1-1

Περιορισμός για το y

$y \in [0,1]$

Άρα $f^{-1}(y) = 1-(1-y^2)^2,\ y \in [0,1]$

$f^{-1}(x) = 1-(1-x^2)^2,\ x \in [0,1]$

Έστω $f(x)=x^2-6x+17$, $x \le 3$

α) Ν.δ.ο. f αντιστρέφεται

β) Να ορίσετε την f^{-1}.

α) κάθε συνάρτηση της μορφής

$f(x)=ax^2+bx+\gamma$, $a>0$

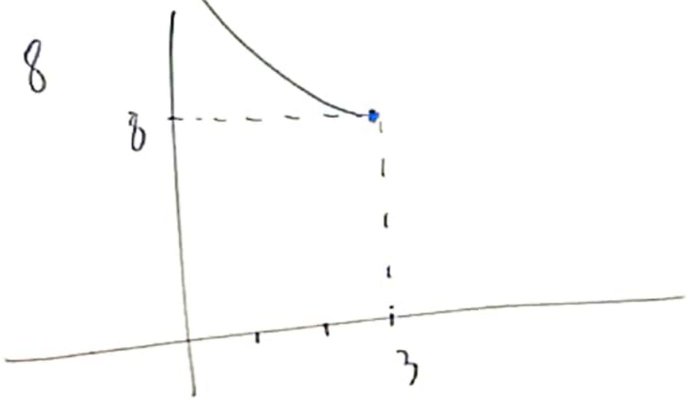
Είναι $f \downarrow$ στο $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$

$f \uparrow$ στο $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2\cdot 1} = 3$$

$f \downarrow$ στο $(-\infty, 3] = D_f \Rightarrow f$: 1-1 στο D_f

$f(3)=8$



Από γραφ. παράσταση $\rightarrow f(A)=[8,+\infty)$

Λύνω την εξίσωση

$f(x)=y$ ως προς x

$x^2-6x+17=y \Leftrightarrow$

$\underbrace{x^2-2\cdot x\cdot 3+9}-9+17=y$

$(x-3)^2+8=y \Leftrightarrow (x-3)^2=y-8$

πρέπει $y-8 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 8$

$x-3=\sqrt{y-8}$ ή $x-3=-\sqrt{y-8}$

αδύνατη διότι $x<3$

$x=3-\sqrt{y-8}$

$f^{-1}(y)=3-\sqrt{y-8}$ $\quad y \geq 8$

$f^{-1}(x)=3-\sqrt{x-8}$, $x \geq 8$

Scanned with CamScanner

άσκ. 3) $f(x) = x\cdot(x^2-6x+12),\quad x\in\mathbb{R}$

$f(x) = x^3-6x^2+12x = x^3-3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2-8+8 = (x-2)^3+8$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow$

$(x_1-2)^3+8 = (x_2-2)^3+8 \Leftrightarrow$

$(x_1-2)^3 = (x_2-2)^3 \Leftrightarrow$

$x_1-2 = x_2-2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

άρα $f: 1-1$

Λύνω την εξίσωση

$f(x) = y$ ως προς x.

$(x-2)^3+8 = y \Leftrightarrow$

$(x-2)^3 = y-8 \quad (1)$

1ον) Αν $y \geq 8$

$(1) \Leftrightarrow x-2 = \sqrt[3]{y-8} \Leftrightarrow$

$x = 2+\sqrt[3]{y-8}$

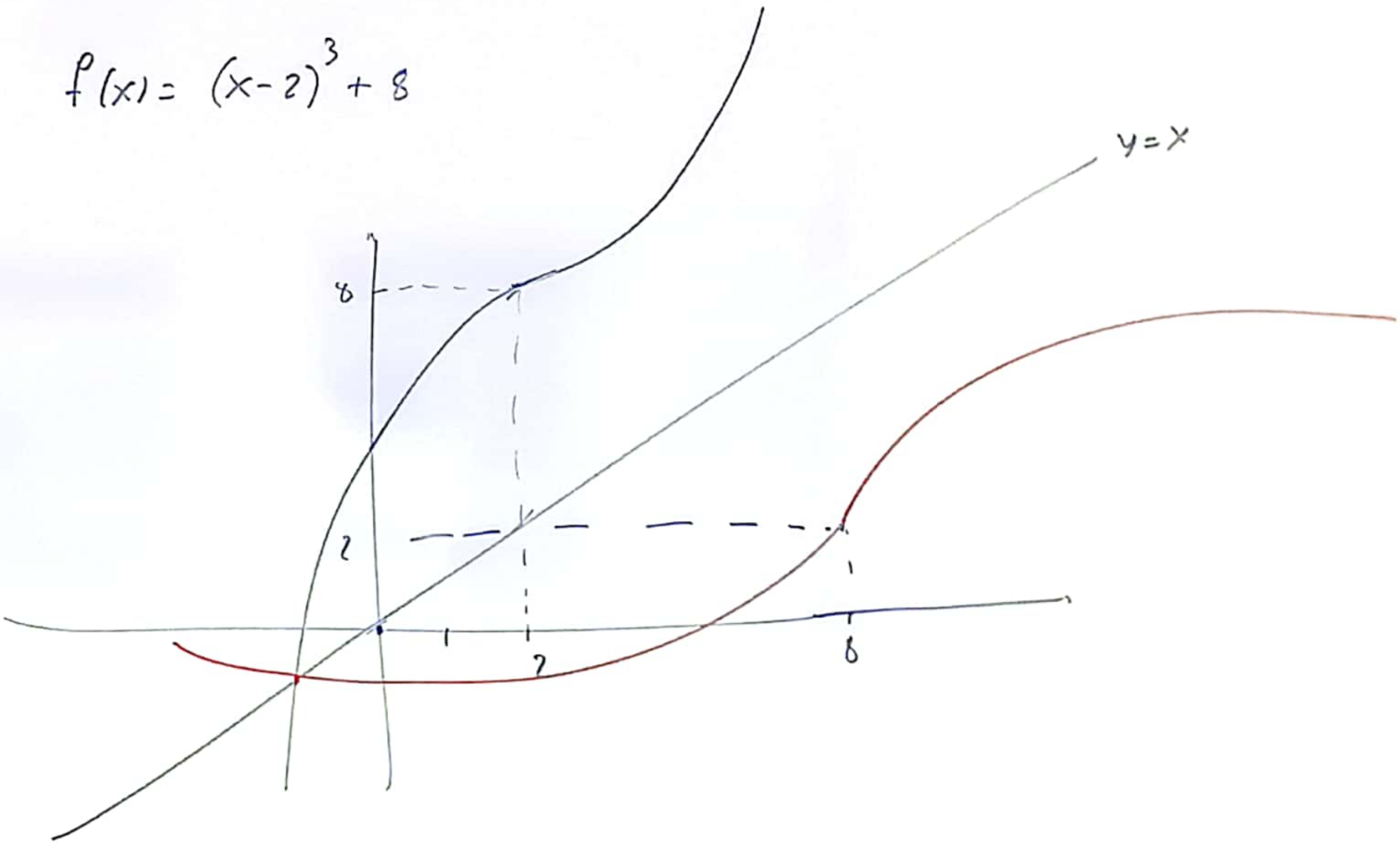
2ον) Αν $y<8$

$(1) \Leftrightarrow x-2 = -\sqrt[3]{|y-8|} \Leftrightarrow$

$x = 2-\sqrt[3]{|y-8|}$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} 2+\sqrt[3]{y-8}, & \text{αν } y\geq 8 \\ 2-\sqrt[3]{|y-8|}, & \text{αν } y<8 \end{cases}$$

$$f(x) = (x-2)^3 + 8$$



1) Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ 1-1. τότε $f(f^{-1}(x)) = x$ $\forall x \in A$. Λ

2) Οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$, $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι αντίστροφες Σ

3) Οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$, $x \in [0, +\infty)$, $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$ είναι αντίστροφες.

$$x^2 = \sqrt{x}$$