ασκ.5 | Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι 1-1, ν.δ.ο. $g(x)=f^3(x)+2f(x)$ είναι 1-1

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2) \Rightarrow f^3(x_1)\neq f^3(x_2)$

$2f(x_1)\neq 2f(x_2)$

$f^3(x_1)+2f(x_1)\neq f^3(x_2)+2f(x_2)$

$g(x_1)\neq g(x_2)$ (λάθος)

Έστω $A(x)=x^3+2x\,,\ x\in\mathbb{R}$

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ $x_1<x_2 \Rightarrow x_1^3<x_2^3$

$2x_1<2x_2$

$x_1^3+2x_1<x_2^3+2x_2 \Rightarrow A(x_1)<A(x_2) \Rightarrow$ η $A(x)\uparrow$ στο $\mathbb{R}$

Άρα $A(x)$ είναι 1-1

Θα δ.ο. g είναι 1-1.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $g(x_1)=g(x_2) \Leftrightarrow$

$f^3(x_1)+2f(x_1)=f^3(x_2)+2f(x_2) \Leftrightarrow$

$A(f(x_1))=A(f(x_2)) \overset{A:1-1}{\Longleftrightarrow} f(x_1)=f(x_2) \overset{f:1-1}{\Longleftrightarrow} x_1=x_2$

Άρα g 1-1

Scanned with CamScanner

άσκ. 3

(α) $ημ^5 x - συν^5 x = 3(συν x - ημ x) \Leftrightarrow$

Π.Ο. εξίσωσης: $\mathbb{R}$

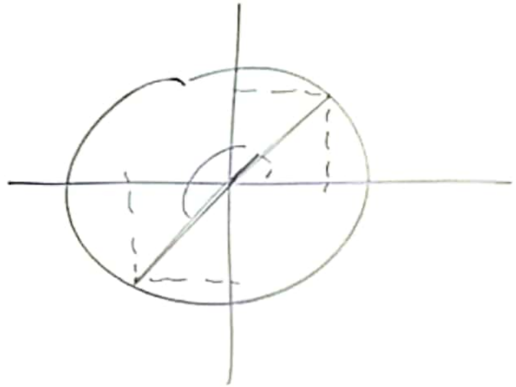
$ημ^5 x + 3ημ x = συν^5 x + 3συν x \Leftrightarrow$

Έστω $A(x) = x^5 + 3x$

δείχνω ότι $A(x) \uparrow \rightarrow 1-1$

$A(ημ x) = A(συν x) \xLeftrightarrow[1-1]{A(x)}$

$ημ x = συν x \Leftrightarrow$



$x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$ μοναδικές λύσεις στο $[0, 2\pi]$

Άρα όλες οι λύσεις

$x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ $\quad x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$

(β) $x^9 + 2x^3 = 8x^3 + 4x \Leftrightarrow$

Έστω $A(x) = x^3 + 2x$

Θ.δ.ο. $A(x) \uparrow$ στο $\mathbb{R} \rightarrow 1-1$

$(x^3)^3 + 2x^3 = (2x)^3 + 2\cdot(2x) \Leftrightarrow$

$A(x^3) = A(2x) \xLeftrightarrow[1-1]{A(x)}$

$x^3 = 2x \Leftrightarrow x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

Scanned with CamScanner

Θεμ. 3 / (γ)

$$e^{2x-1} - \frac{1}{e^{x}} = 3\cdot(1-3x) \Leftrightarrow$$

$$e^{2x-1} - e^{-x} = 3 - 9x \Leftrightarrow$$

$$e^{2x-1} = e^{-x} + 3 - 9x$$

$$e^{2x-1} + 8x - 3 = e^{-x} - x$$

$$e^{2x-1} + 6x - 3 = e^{-x} - 3x \Leftrightarrow$$

$$e^{2x-1} + 3\cdot(2x-1) = e^{-x} + 3\cdot(-x) \Leftrightarrow$$

$$A(2x-1) = A(-x) \Leftrightarrow$$

$$2x-1 = -x \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = 1/3$$

$A(x) = e^{x} + 3x$

δ.ο. $A(x) \uparrow \Rightarrow 1-1$

<u>σχόλ. 4</u> $f \circ f$ είναι 1-1 Τότε f 1-1

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Longleftrightarrow$

$$(f \circ f)(x_1) = (f \circ f)(x_2) \xrightarrow[1-1]{f \circ f} x_1 = x_2$$ ο.ε.δ.

Scanned with CamScanner