<u>Ορ. 1</u> $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται 1-1 $\iff \forall x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$

$f: A \to \mathbb{R}$ $\implies$ όχι 1-1 $\iff \exists x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$

<u>Ασκ. 2</u> (1-1)

α) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ όχι 1-1

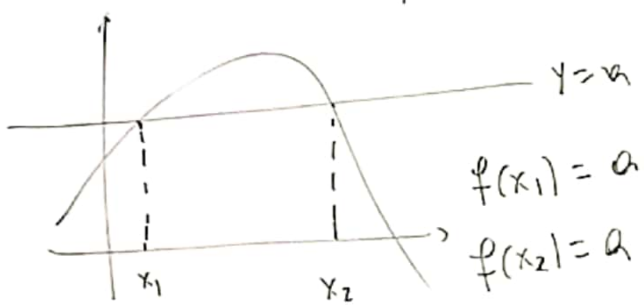
$f(1) = \dfrac{1}{2}$. $f(-1) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$. άρα όχι 1-1

γ) $f(x) = \underline{x^5 - x^4} + 2$, $f(0) = 2$, $f(1) = 2$

$x^4(x-1) + 2$

<u>Θεώρημα:</u> Αν $f: A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη τότε είναι 1-1

<u>Παρατήρηση:</u> Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 $\iff$ κάθε ευθεία της μορφής $y = \alpha$ τέμνει την C_f το πολύ σ' ένα σημείο.



$f(x_1) = \alpha$
$f(x_2) = \alpha$

<u>Σημείωση:</u> <u>ΔΕΝ</u> ισχύει το αντίστροφο του παραπάνω θεωρ.

Δηλ. μπορεί μια συνάρτηση να 'ναι 1-1 αλλά όχι γνησ. μονοτ

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

ασκ. 1 / 1-1

67) $f(x)=x^3+x^2+x+1, \quad x\in\mathbb{R}$ ν.δ.ο.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow$

$$x_1^3+x_1^2+x_1+\cancel{1} = x_2^3+x_2^2+x_2+\cancel{1} \Leftrightarrow$$

$$x_1^3-x_2^3+x_1^2-x_2^2+x_1-x_2=0 \Leftrightarrow$$

$$(x_1-x_2)(x_1^2+x_1\cdot x_2+x_2^2)+(x_1-x_2)\cdot(x_1+x_2)+(x_1-x_2)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x_1-x_2)\left(x_1^2+x_1\cdot x_2+x_2^2+x_1+x_2+1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$x_1=x_2$ ή $x_1^2+x_1\cdot x_2+x_2^2+x_1+x_2+1=0$

$$x_1^2+(x_2+1)\cdot x_1+(x_2^2+x_2+1)=0 \quad (1)$$

$$\Delta=(x_2+1)^2-4\cdot(x_2^2+x_2+1)=x_2^2+2x_2+1-4x_2^2-4x_2-4=$$

$$=-3x_2^2-2x_2-3<0 \quad \forall x_2\in\mathbb{R}$$

άρα η (1) δεν δέχεται λύση

$$\Delta_{x_2}=(-2)^2-4\cdot(-3)\cdot(-3)<0$$