Ορισμός: Λέμε ότι οι συναρτήσεις $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g: B \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι ίσες

$\Longleftrightarrow$ 1) $A = B$

2) $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$

ασκ.9.: $f(x) = \dfrac{x^2+2|x|+1}{x^2-1}$, $g(x) = \dfrac{|x|+1}{|x|-1}$

Βρίσκω το π.ο. της f.

Πρέπει $x^2-1 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq \pm 1$

Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

Βρίσκω το π.ο. της g

Πρέπει $|x|-1 \neq 0 \Longleftrightarrow |x| \neq 1 \Longleftrightarrow x \neq \pm 1$

Άρα $D_g = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ Άρα είναι $D_f = D_g$

Τώρα: $f(x) = \dfrac{x^2+2|x|+1}{x^2-1} = \dfrac{|x|^2+2|x|+1}{|x|^2-1} = \dfrac{(|x|+1)^2}{(|x|+1)(|x|-1)} = \dfrac{|x|+1}{|x|-1} = g(x)$

Άρα $f = g$

ασκ.10 $\quad g^2(x) - 2x\cdot g(x) = 1 - x^2 \quad \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$g^2(x) - 2x\cdot g(x) + x^2 = 1 \quad \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$(g(x) - x)^2 = 1 \quad (1) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Αφού η C_g είναι πάνω από την $y=x \Rightarrow$

$g(x) - x > 0$ άρα από την (1)

$\Rightarrow g(x) - x = 1 \Leftrightarrow g(x) = x+1$

$\overset{(2)}{g(x) - x = 1} \quad \forall x\in\mathbb{R}$ ή $\overset{(3)}{g(x) - x = -1} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

αφού η C_g πάνω από την $y=x$

$\Rightarrow g(x) > x \Leftrightarrow g(x) - x > 0$

Άρα απορ. η (3)

$\Rightarrow g(x) = x+1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Αν $f^2(x) = g^2(x) \quad \forall x\in\mathbb{R} \xrightarrow{(?)} f(x) = g(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$ ή $f(x) = -g(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

SOS — Λάθος!

Π.χ. $\quad f^2(x) = 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

1) $f(x) = 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

2) $f(x) = -1, \quad \forall x\in\mathbb{R}$

3) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ -1, & x < 1 \end{cases}$

$$f(x)\cdot g(x) \neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \Longrightarrow f(x)\neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x)\neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Ασκ. 8 $f(x)\le x$ (1) $\forall x\in\mathbb{R}$. $f(x)+f(-x)\ge 0$ (2) $\forall x\in\mathbb{R}$ Ν.δ.ο. $f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} (2) \Rightarrow f(x) \ge -f(-x) \\ (1) \xrightarrow{x=-x} f(-x)\le -x \Rightarrow -f(-x)\ge x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x)\ge x \quad \forall x\in\mathbb{R} \\ \text{από } (1) \Rightarrow f(x)\le x \quad \forall x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=x \\ \forall x\in\mathbb{R}. \end{array}$$

Αν $f^2(x)=g^2(x) \quad \forall x\in\mathbb{R} \xrightarrow{(?)} f(x)=g(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)=-g(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

SOS — λάθος.

$$f^2(x)+g^2(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \longrightarrow f(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$f(x)\cdot g(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \not\Longrightarrow f(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad \text{ή} \quad g(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$f(x)=\begin{cases} 3, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases} \qquad g(x)\begin{cases} 0, & x>0 \\ 4, & x\le 0 \end{cases}$$