Η ιδιότητα αυτή, που επιτρέπει να ανάγεται το όριο του πηλίκου συναρτήσεων στο όριο του πηλίκου των παραγώγων τους, ισχύει γενικότερα για συναρτήσεις που πληρούν ορισμένες συνθήκες. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα που είναι γνωστό ως **κανόνας του De l' Hospital.**

ΘΕΩΡΗΜΑ **Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες υποθέτουμε ότι:**

- **είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ με $x_0 \in \Delta$**
- **η g΄ είναι συνεχής στο x_0 με $g'(x_0) \neq 0$**
- $f(x_0) = g(x_0) = 0$

Τότε:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Απόδειξη. Επειδή η g΄ είναι συνεχής στο x_0, σε μια περιοχή του x_0 θα έχει (§ 3.11, 6) το πρόσημο του ορίου της, $g'(x_0) \neq 0$, δηλαδή υπάρχει διάστημα $\Delta_1 \subseteq \Delta$ με $x_0 \in \Delta_1$ τέτοιο ώστε

$$\forall\, x \in \Delta_1, \quad g'(x) \neq 0 \tag{6}$$

Εξάλλου για κάθε $x \in \Delta_1$ με $x \neq x_0$ υπάρχει ξ μεταξύ x_0 και x (§ 4.15), τέτοιο ώστε $g(x)-g(x_0) = g'(\xi)(x-x_0)$ ή, επειδή $g(x_0) = 0$,

$$g(x) = g'(\xi)\,(x-x_0)$$

Από την ισότητα αυτή και την (6) προκύπτει ότι

$$\forall\, x \in \Delta_1 \text{ με } x \neq x_0, \quad g(x) \neq 0$$

Τότε, για κάθε τέτοιο x ορίζεται το πηλίκο των συναρτήσεων και θα έχουμε:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} \tag{7}$$

Επειδή όμως υπάρχουν τα όρια στο x_0 των όρων του τελευταίου κλάσματος της (7) και είναι αντιστοίχως $f'(x_0)$ και $g'(x_0) \neq 0$, θα υπάρχει το όριο του πρώτου κλάσματος και θα είναι:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω ότι ζητείται το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x - x^2}{x^3 - x}$.

Οι συναρτήσεις f με $f(x) = \eta\mu x - x^2$ και g με $g(x) = x^3 - x$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Ακό-

Επομένως:

$$g'(x)=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-1} \quad \text{με } \xi\in(x,1)$$

Αλλά $x<\xi<1$, οπότε $f'(x)<f'(\xi)$. Επειδή $x-1<0$ και $f'(x)-f'(\xi)<0$, θα είναι $g'(x)>0$ για κάθε $x<1$ και έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

2.19 Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α,β) με $g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Να αποδειχθεί ότι:

α) $g(\alpha)\neq g(\beta)$ και η g είναι «1 – 1»,

β) υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}$,

γ) αν $\alpha\geq 0$ υπάρχουν $\kappa,\lambda,\mu\in(\alpha,\beta)$ τέτοια, ώστε:

$$6f'(\kappa)=3(\alpha+\beta)\frac{f'(\lambda)}{\lambda}=2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\frac{f'(\mu)}{\mu^2}$$

ΛΥΣΗ

α) Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι:

$$g(\alpha)=g(\beta)$$

Επειδή η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $g(\alpha)=g(\beta)$, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$. Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι $g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

Σχόλιο

Επισημαίνουμε ότι μια συνάρτηση h με $h'(x)\neq 0$ σε κάθε σημείο x ενός διαστήματος Δ είναι «1 – 1». Η απόδειξη είναι ακριβώς ίδια με αυτή που προηγήθηκε, αφού αν η h δεν είναι «1 – 1», τότε υπάρχουν $\alpha,\beta\in\Delta$ με $\alpha<\beta$ τέτοια, ώστε $h(\alpha)=h(\beta)$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x)=f(x)\left[g(\beta)-g(\alpha)\right]-g(x)\left[f(\beta)-f(\alpha)\right]$$

Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και:

- $h(\alpha)=f(\alpha)g(\beta)-f(\alpha)g(\alpha)-g(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)f(\alpha)=f(\alpha)g(\beta)-g(\alpha)f(\beta)$
- $h(\beta)=f(\beta)g(\beta)-f(\beta)g(\alpha)-g(\beta)f(\beta)+g(\beta)f(\alpha)=f(\alpha)g(\beta)-g(\alpha)f(\beta)=h(\alpha)$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle και παίρνουμε τη ζητούμενη.